CHAPITRE 6

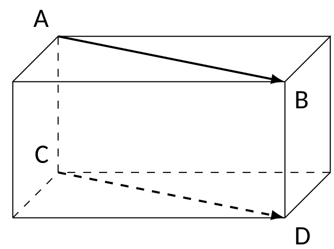
Vecteurs, droites et plans de l'espace

I Vecteurs de l'espace

1. Vecteurs et translations

Définition I.1

- Soit A et B deux points de l'espace. La translation qui transforme A en B est la transformation qui à tout point C associe le point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme. On dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction (la droite (AB)), par son sens (de A vers B) et par sa norme (la distance AB notée $||\overrightarrow{AB}||$).
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



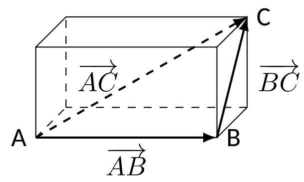
Exemple I.1 — Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $BCGF$ et K l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Montrer que I est le milieu de $[AK]$. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Somme de vecteurs et relation de Chasles

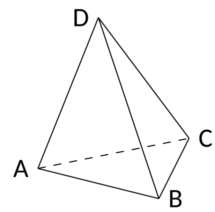
La somme de vecteurs de l'espace est définie de manière identique à celle dans le plan.

Proposition I.2

Si A, B et C sont trois points de l'espace alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Exemple I.2 — Soit $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points I, J, K et L tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Faire une figure puis montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $IJKL$? $\longrightarrow$ À rédiger



3. Colinéarité de vecteurs

Définition I.3

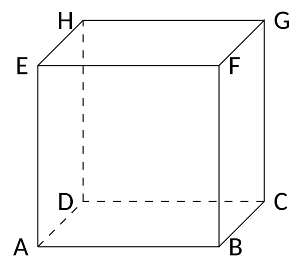
- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de l'espace et k est un réel, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a la même direction que $\overrightarrow{u}$, le même sens si $k \geqslant 0$ ou le sens contraire si $k < 0$ et dont la norme est $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$
- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Proposition I.4

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Exemple I.3 — Soit $ABCDEFGH$ un cube representé ci-contre.

1. Placer le point I centre de la face $BCGF$, K milieu de $[HG]$ et le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$? $\longrightarrow$ À rédiger



4. Combinaisons linéaires de vecteurs

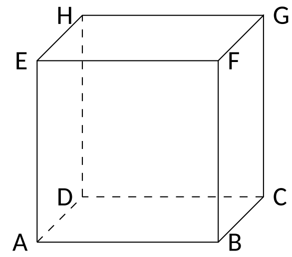
Définition I.5

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ des vecteurs de l'espace. On dit que $\overrightarrow{u}$ est une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ s'il existe des réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} + z\overrightarrow{t}$.

Exemple I.4 — Soit $ABCDEFGH$ un cube. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$:

1. $\overrightarrow{HB}$
2. $\overrightarrow{DF}$
3. $\overrightarrow{GA}$

→ À rédiger



Définition I.6

On dit que des vecteurs sont **linéairement indépendants** si on ne peut pas exprimer l'un comme combinaison linéaire des autres.

Remarque — Dans le cas de deux vecteurs, dire qu'il sont linéairement indépendants revient à dire qu'ils ne sont pas colinéaires.

Exemple I.5 — Soit $ABCDEFGH$ un cube. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants. → À rédiger

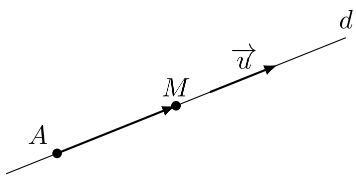
II Droites de l'espace

1. Caractérisation d'une droite de l'espace

Définition II.1

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$, où $k \in \mathbb{R}$, s'appelle une **droite**.
- Le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'appelle un **vecteur directeur** et le couple $(A; \overrightarrow{u})$ s'appelle un **repère** de cette droite.



Remarque — Si A et B sont deux points, la droite (AB) est par définition la droite $(A; \overrightarrow{AB})$.

Exemple II.1 — Soit M, N et P trois points de l'espace non alignés. On considère les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$$

1. Faire une figure.
2. Montrer que le point P appartient à la droite (IJ). Que peut-on en déduire pour les points P, I et J ? → À rédiger

2. Droites parallèles

Définition II.2

Soit d et d' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On dit que d et d' sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exemple II.2 — Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[AI]$. Soit M et H les points tels que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$.
2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles. → À rédiger

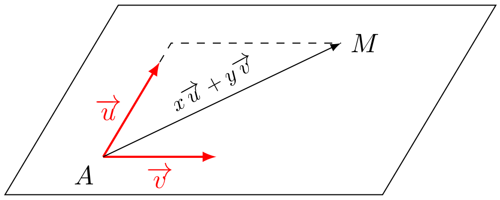
III Plans de l'espace

1. Caractérisation d'un plan de l'espace

Définition III.1

Soit A un point de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, s'appelle un **plan**.
- Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ s'appelle une **base** (ou **vecteurs directeurs**) et le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ s'appelle un **repère** de ce plan.



Remarque — Si A, B et C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est par définition le plan $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Vecteurs coplanaires

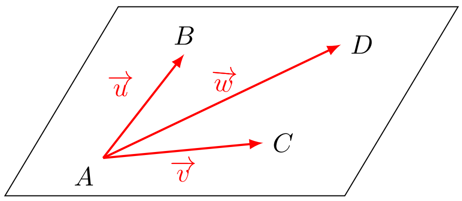
Définition III.2

On dit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si on peut écrire l'un comme une combinaison linéaire des deux autres.

Exemple III.1 — Soit $ABCDEFGH$ un cube, I le centre de la face $ADHE$ et J le centre de la face $BCGF$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires. $\rightarrow$ À rédiger

Proposition III.3

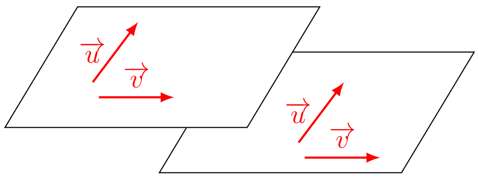
- Quatre points A, B, C et D appartiennent à un même plan si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont incluses dans un même plan si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.



3. Plans parallèles, droite parallèle à un plan

Définition III.4

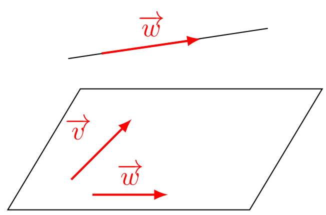
On dit que deux plans sont parallèles si un couple de vecteurs directeurs de l'un est aussi un couple de vecteurs directeurs de l'autre.



Remarque — Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que chaque vecteur directeur du premier plan est une combinaison des vecteurs directeurs du deuxième.

Définition III.5

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On dit que la droite d est parallèle au plan P si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



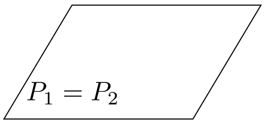
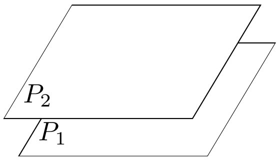
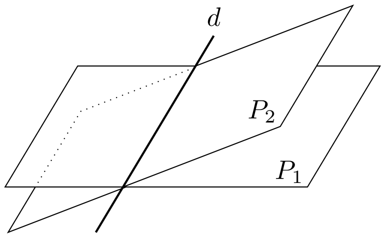
Exemple III.2 — Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AD]$, $[BC]$ et $[FG]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IG}$.
2. En déduire une écriture de $\overrightarrow{AK}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$.
3. En déduire que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH). $\rightarrow$ À rédiger

IV Position relative de droites et de plans

1. Position relative de deux plans de l'espace

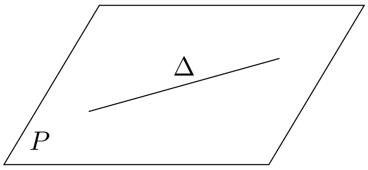
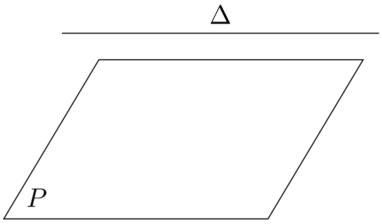
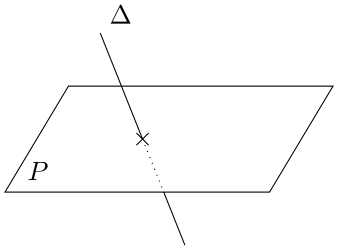
Soit P_1 et P_2 deux plans de l'espace. Il y a trois situations possibles :

P_1 et P_2 confondus	P_1 et P_2 strictement parallèles	P_1 et P_2 sécants
		

Exemple IV.1 — Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles. $\rightarrow$ À rédiger

2. Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

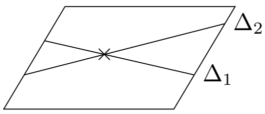
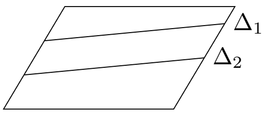
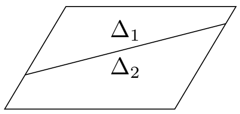
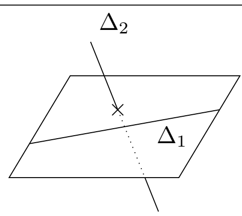
Soit Δ une droite et P un plan de l'espace. Il y a trois situations possibles :

Δ contenue dans P	Δ est strictement parallèle à P	Δ et P sécants
		

Exemple IV.2 — Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le milieu de $[GC]$, J le milieu de $[HG]$ et K le milieu de $[AD]$. Donner sans justifier la position des droites (EI), (FJ) et (CK) par rapport au plan (ABC). $\rightarrow$ À rédiger

3. Position relative de deux droites de l'espace

Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites de l'espace. Il y a quatre situations possibles :

Coplanaires			Non coplanaires
sécantes	strictement parallèles	confondues	
 Un point commun unique	 Pas de point commun	 Tous les points sont en commun	 Il n'existe pas de plan contenant les deux droites

Exemple IV.3 — Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I, J et L les milieux respectifs des segments $[EH]$, $[FG]$ et $[GC]$. Soit O et K les points tels que $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$. Donner les positions relatives des couples de droites suivants :

1. (IO) et (DK)
2. (BJ) et (EF)
3. (JL) et (BC)

$\rightarrow$ À rédiger

V Bases, repères et coordonnées

1. Bases de l'espace

Définition V.1

On appelle **base** de l'espace tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Proposition V.2

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$.
On dit alors que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exemple V.1 — Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. On note I le milieu de $[AB]$, O le centre de la face $ADHE$ et J le point tel que $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace puis décomposer les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ dans cette base. $\longrightarrow$ À rédiger

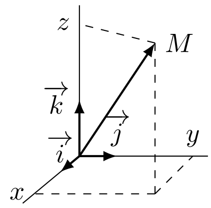
2. Repères et coordonnées

Définition V.3

On appelle **repère** de l'espace tout quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Définition V.4

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et soit M un point.
L'unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ s'appelle les **coordonnées** de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



3. Opérations sur les coordonnées

Proposition V.5

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple V.2 — Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Soit L le milieu de $[JK]$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
2. À l'aide des coordonnées, montrer que $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires. $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition V.6

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace et k un réel.

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} \alpha+\alpha' \\ \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' \end{pmatrix}$ et celles du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \\ k\gamma \end{pmatrix}$.

Exemple V.3 — Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. Soit K le milieu de $[HG]$, I le centre de la face $BCGF$ et J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ puis montrer que les droites (AK) et (IJ) sont parallèles. $\longrightarrow$ À rédiger

4. Représentation paramétrique d'une droite

Proposition V.7

Soit Δ une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Soit $M(x;y;z)$ un point quelconque de l'espace. Alors :

$$M \in \Delta \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$$

Ces équations s'appellent une **représentation paramétrique** de la droite Δ.

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple V.4 — Donner une équation paramétrique de la droite (AB) avec $A(-1;2;3)$ et $B(1;-1;1)$. Le point $C(2;0;4)$ appartient-il à la droite (AB) ? $\longrightarrow$ À rédiger

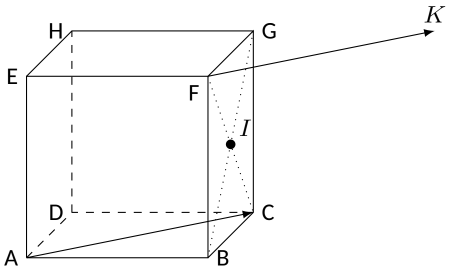
Exemple V.5 — Déterminer des vecteurs directeurs puis le point d'intersection des droites d et d' qui ont pour équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{et } d' : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

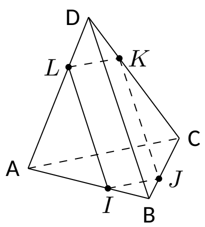
$\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

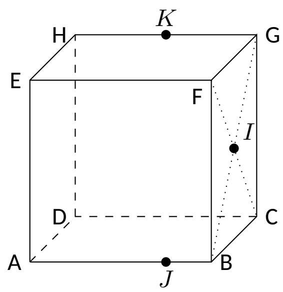
Exemple I.1
Comme K est l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ alors $ACKF$ est un parallélogramme. Les diagonales de ce parallélogramme se coupent donc en leur milieu. Comme I est le milieu de $[FC]$, c'est donc aussi le milieu de $[AK]$.



Exemple I.2
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
Ainsi, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
De même, $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
Ainsi, $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc $IJKL$ est un parallélogramme.



Exemple I.3
1. On a la figure suivante :

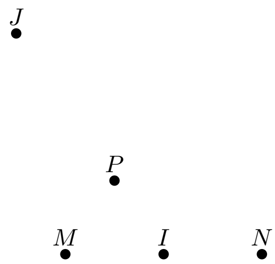


2. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$
   $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
   On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont donc colinéaires.

Exemple I.4
1. $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$
2. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HD}$
3. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD}$

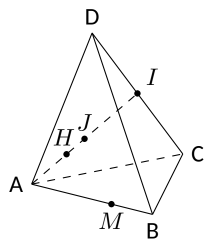
Exemple I.5
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étaient pas linéairement indépéndants, ils seraient colinéaires et donc les points A, B et C seraient alignés, ce qui n'est pas le cas. Ils sont donc linéairement indépendants.

Exemple II.1
1. Voici la figure :



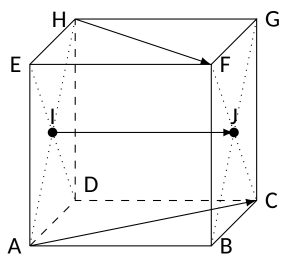
2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$
   $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MP} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$
   On en déduit que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IP}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{IP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. Cela veut donc dire que le point P appartient à la droite (IJ). On en déduire que les points I, J et P sont alignés.

Exemple II.2
1. On a la figure suivante :



   $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$
   $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$
2. On constate que $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont alignés. Par suite, les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

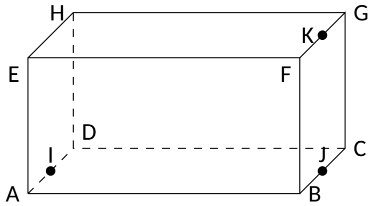
Exemple III.1
On a la figure suivante :



$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$
Montrons que $\overrightarrow{AC}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{HF}$:
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{HF}$.
Les vecteurs sont donc coplanaires.

Exemple III.2

1. On a la figure suivante :



$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{IG}$

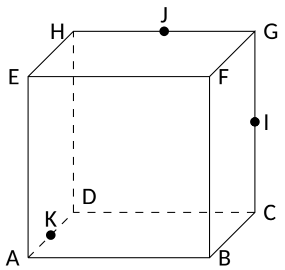
2. On en déduit que $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IH}$.
3. D'après la question précédente, on peut écrire le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont coplanaires. Comme $\overrightarrow{AK}$ est un vecteur directeur de la droite (AK) et que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont des vecteurs directeurs du plan (IJH), on en déduit que (AK) est parallèle au plan (IJH).

Exemple IV.1

$\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DE}\right)$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (BDE). Or, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$ donc $\left(\overrightarrow{FH};\overrightarrow{CF}\right)$ qui un couple de vecteurs directeurs du plan (CFH) est aussi un coupl de vecteurs directeurs du plan (BDE). On en déduit que les plans sont confondus ou parallèles. Or, $B\notin(CFH)$ donc ils ne peuvent être confondus. Ils sont donc strictement parallèles.

Exemple IV.2

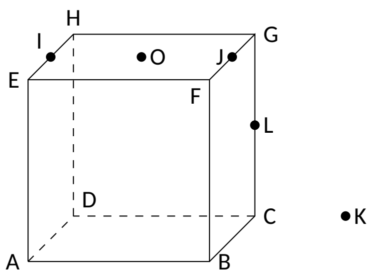
On a la figure suivante :



1. (EI) est sécante au plan (ABC)
2. (FJ) est parallèle au plan (ABC)
3. (CK) est incluse dans le plan (ABC)

Exemple IV.3

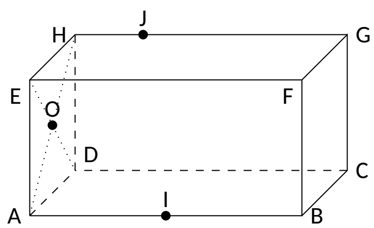
On a la figure suivante :



1. (IO) et (DK) sont parallèles
2. (BJ) et (EF) sont non Coplanaires
3. (JL) et (BC) sont sécantes

Exemple V.1

On a la figure suivante :



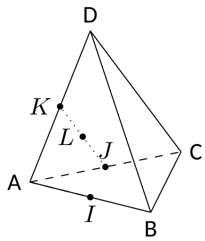
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires car le point E n'appartient pas au plan ABD donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace. De plus,

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Exemple V.2

On a la figure suivante :

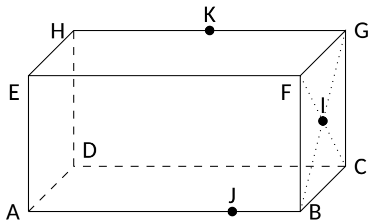


1. $I\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$, $J\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $K\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$ et $L\left(0;\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$
2. $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{2}\\ \dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

   On remarque que $\overrightarrow{IL}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.

Exemple V.3

On a la figure suivante :



$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $I\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $J\left(\dfrac{3}{4};0;0\right)$ et $K\left(\dfrac{1}{2};1;1\right)$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{4}\\ \dfrac{-1}{2}\\ \dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AK}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (AK) sont parallèles.

Proposition V.7

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$M\in\Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\iff \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}$

Ainsi, $M\in\Delta \iff \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}$.

Exemple V.4
Puisque $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}$, une équation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases}x=2t-1\\y=-3t+2 \quad (t\in\mathbb{R})\\z=-2t+3\end{cases}$

$C \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases}2=2t-1\\0=-3t+2\\4=-2t+3\end{cases} \iff$

$\begin{cases}t=2/3\\t=2/3\\t=-1/2\end{cases}$

Comme ce système n'a pas de solution, le point C n'appartient pas à la droite (AB).

Exemple V.5
Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\dfrac{1}{-1}\neq\dfrac{-1}{-1}$, les vecteurs ne sont donc pas colinéaires donc les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}1+t=3-\lambda\\3-2t=2-\lambda\\2-t=-1+2\lambda\end{cases}$

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}t+\lambda=2\\-2t+\lambda=-1\\-t-2\lambda=-3\end{cases}$

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}t+\lambda=2\\3t=3 \quad L_2\leftarrow L_1-L_2\\-t-2\lambda=-3\end{cases}$

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}t+\lambda=2\\t=1\\-t-2\lambda=-3\end{cases}$

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}1+\lambda=2\\t=1\\-1-2\lambda=-3\end{cases}$

$M\in d\cap d' \iff \begin{cases}\lambda=1\\t=1\\\lambda=1\end{cases}$

Comme ce système possède une unique solution, les droites d et d' sont donc sécantes. Les coordonnées du point d'intersection sont $(2;1;1)$ (obtenus par exemple en remplaçant t par 1 dans l'équation paramétrique de la droite d).

Vecteurs, droites et plans de l'espace

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés
- Savoir exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs
- Connaître la caractérisation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur
- Connaître la caractérisation d'un plan à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs
- Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires
- Savoir décrire la position relative de deux plans, d'une droite et d'un plan ou de deux droites
- Savoir décomposer un vecteur dans une base
- Savoir déterminer les coordonnées d'un point dans un repère
- Savoir déterminer la représentation paramétrique d'une droite
- Savoir déterminer l'intersection de deux droites à partir de leurs équations paramétriques

Vecteurs, droites et plans de l'espace

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés
- Savoir exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs
- Connaître la caractérisation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur
- Connaître la caractérisation d'un plan à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs
- Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires
- Savoir décrire la position relative de deux plans, d'une droite et d'un plan ou de deux droites
- Savoir décomposer un vecteur dans une base
- Savoir déterminer les coordonnées d'un point dans un repère
- Savoir déterminer la représentation paramétrique d'une droite
- Savoir déterminer l'intersection de deux droites à partir de leurs équations paramétriques

Vecteurs, droites et plans de l'espace

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés
- Savoir exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs
- Connaître la caractérisation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur
- Connaître la caractérisation d'un plan à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs
- Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires
- Savoir décrire la position relative de deux plans, d'une droite et d'un plan ou de deux droites
- Savoir décomposer un vecteur dans une base
- Savoir déterminer les coordonnées d'un point dans un repère
- Savoir déterminer la représentation paramétrique d'une droite
- Savoir déterminer l'intersection de deux droites à partir de leurs équations paramétriques