Succession d'épreuves indépendantes

Exercice 1
Les enfants de deux familles se retrouvent un dimanche pour jouer des matchs de tennis. La première famille comporte quatre enfants notés a, b, c et d (dans l'ordre, a est le plus âgé et d le plus jeune). La deuxième famille comporte deux enfants notés e (l'aîné) et f (le cadet).
Pour le premier match, on choisit au hasard un enfant de la première famille puis un enfant de la seconde famille.

1. Que peut-on dire de ces deux épreuves ?
2. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
3. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
4. Calculer la probabilité que les aînés de chaque famille jouent ce premier match.

Exercice 2
Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres sont vertes. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une première boule, à noter son numéro, puis à la remettre dans l'urne. On tire ensuite une seconde boule dont on note la couleur.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre.
3. Établir la liste des issues possibles. Quelle est la probabilité de l'issue $(1; R)$?

Exercice 3
On considère deux urnes A et B. L'urne A contient trois jetons jaunes et deux jetons bleus. L'urne B contient trois jetons noirs, deux rouges et un jaune. L'expérience consiste à choisir une des urnes au hasard puis à piocher un jeton dans l'urne choisie. On s'intéresse à la couleur du jeton saisi.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Cette expérience est-elle une succession de deux épreuves indépendantes ?
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité de l'événement J : « obtenir un jeton jaune ».
4. Sachant que l'on a obtenu un jeton jaune, quelle est la probabilité que le jeton provienne de l'urne A ? On rappelle la formule $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
5. On modifie l'expérience précédente de façon à choisir l'urne A avec une probabilité p. Pour quelle valeur de p la probabilité de l'événement J est-elle maximale ?

Exercice 4
Amel est fan de manga et elle se rend au salon du livre. Trois mangakas nommés Akira, Hiromu et Takeshi sont présents sur leurs stands. Comme il y a beaucoup de monde, on attribue au hasard un stand à Amel et on l'autorise à prendre une photo et une seule avec l'auteur. Amel est plutôt bonne photographe et la probabilité qu'elle réussisse la photo est $0,8$.

1. (a) Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
   (b) Représenter l'univers de cette expérience aléatoire à l'aide d'un produit cartésien.
   (c) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
   (d) Quelle est la probabilité qu'Amel réussisse sa photo ?
2. En réalité, Amel est une grande fan d'Akira et l'émotion fait que si elle devait prendre une photo avec lui, la probabilité de réussir cette photo serait de $0,4$. Pour les autres auteurs, la probabilité est toujours de $0,8$.
   (a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
   (b) Quelle est la probabilité que la photo qu'elle aura prise soit réussie ?
   (c) Sachant que la photo a été réussie, qu'elle est la probabilité qu'Amel ait été sur le stand d'Akira ?

Loi de Bernoulli

Exercice 5
Dans chaque cas, déterminer si la variable X suit une loi de Bernoulli. Quand c'est le cas, donner le paramètre de cette loi.

1. On lance un dé bien équilibré. X prend la valeur 1 si le résultat est un multiple de 3 et prend la valeur 0 sinon.
2. On choisit au hasard un élève de Terminale d'un lycée comportant 53% de filles. X prend la valeur 1 si l'élève est une fille et 0 sinon.

Exercice 6
Une pièce truquée a deux fois plus de chance de tomber sur Pile que sur Face. On lance une fois cette pièce et on définit la variable aléatoire X égale à 1 lorsqu'on tombe sur Face et égale à 0 lorsqu'on tombe sur Pile.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle la loi suivie par X ? Donner son paramètre.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Schéma de Bernoulli

Exercice 7
Un paquet de M&M's ™ en contient 8 rouges, 7 verts, 6 jaunes et 7 bleus. On s'intéresse à l'obtention d'un bleu (les meilleurs !). On considère les deux expériences aléatoires suivantes :

- Expérience 1 : On pioche au hasard un M&M's, on regarde sa couleur, on le mange puis on recommence une 2ème fois.
- Expérience 2 : On pioche au hasard un M&M's, on regarde sa couleur, on le remet proprement dans le paquet, puis on recommence une deuxième fois.

1. Laquelle de ces deux expériences est un schéma de Bernoulli ? Expliquer et donner les paramètres n et p de ce schéma.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité de l'événement A : « On n'obtient aucun bleu sur les deux tirages ».
4. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un bleu au cours des 2 tirages.

Exercice 8
On effectue trois tirages successifs d'une carte dans un jeu de 52 cartes. À chaque fois, on remet la carte dans le jeu. Pour chaque tirage, on appelle succès l'événement « Obtenir un coeur ».

1. Justifier que cette expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli dont on donnera les paramètres.
2. Réaliser un arbre de probabilités modélisant cette situation.

Exercice 9
On a simulé un schéma de Bernoulli à l'aide d'un tableur en utilisant la fonction ALEA() qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

	A	B	C	D	E
1	Répétition 1	Répétition 2	Répétition 3	Répétition 4	Nombre de sucès
2	1	1	0	0	2

1. Dans la cellule A2, on a saisi la formule « = SI(ALEA()<0,4;1;0) ». Préciser les paramètres de ce schéma de Bernoulli.
2. Quelle formule peut-on saisir dans la case E2 pour obtenir le nombre de succès ?

Exercice 10
Compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python pour qu'elle renvoie une liste de booléens simulant un schéma de Bernoulli de paramètres `n` et `p` (un succès est représenté par `True` et un échec par `False`).

```
import random
def schema(n,p):
    resultat = []
    for k in range(......, ......):
        x = random.random()
        if .............. :
            resultat.append(True)
        else:
            ..............
    return ...........
```

Exercice 11
On considère un arbre de probabilités associé au schéma de Bernoulli de paramètres $n = 7$ et $p = 0,3$.

1. Combien y a-t-il de chemins contenant exactement 3 succès ?
2. Combien y a-t-il de chemins ne contenant aucun succès ?
3. Combien y a-t-il de chemins contenant au plus deux succès ?
4. Quelle est la probabilité d'un événement associé à un chemin contenant exactement 4 succès ?

Loi binomiale

Exercice 12
Dans chaque cas, dire si X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres quand c'est le cas.

1. Une urne contient deux boules vertes, une rouge et une bleue. On tire quatre boules avec remise. X est égale au nombre de boules rouges obtenues.
2. On lance quatre fois une pièce bien équilibrée. X est égale à 1 si la même face est apparue 4 fois et à 0 sinon.
3. On lance trois fois de suite un dé bien équilibré. X est égale au plus grand nombre qui est apparu lors des trois lancers.

Exercice 13
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$. Déterminer :
1. $P(X = 1)$ 2. $P(X \leqslant 3)$ 3. $P(X \geqslant 3)$
4. $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

Exercice 14
Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,6$. A l'aide d'une calculatrice, on a trouvé $P(Z \leqslant 15) \approx 0,175$ et $P(Z \leqslant 22) \approx 0,956$. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} de $P(16 \leqslant Z \leqslant 22)$.

Exercice 15
Une urne contient une boule rouge et quatre boules bleues. On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne et on note leur couleur à chaque fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges sorties.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres n et p.
2. Déterminer la loi de probabilité de X. On donnera les valeurs exactes.
3. Représenter la loi de probabilité de X avec un diagramme en bâtons.
4. Déterminer la probabilité de tirer au moins une boule rouge lors des trois tirages.
5. Déterminer l'espérance de X et interpréter.

Exercice 16
Une enquête de l'INPES effectuée en 2014 montre que 28% des français fument quotidiennement. On choisit un hasard et de manière indépendante quatre personnes dans la population française. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fumeurs quotidiens parmi les quatre personnes choisies.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune des quatre personnes choisies ne soit un fumeur quotidien.
3. Calculer la probabilité qu'au plus 2 des personnes choisies soient des fumeurs quotidiens.
4. Calculer la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit un fumeur quotidien.
5. Déterminer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 17
Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques. Un contrôle de qualité consiste à vérifier la conformité des pièces par rapport aux nombres en vigueur. On sait que 90% des pièces du stock sont conformes. On prélève 10 pièces au hasard ; le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement 7 pièces soient conformes.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 pièces soient conformes.
4. En moyenne, sur 10 pièces prélevées au hasard dans le stock, combien seront conformes ?

Utilisation de la loi binomiale

Exercice 18
Un professeur prépare un exercice de type QCM pour ses élèves. Ce QCM est composé de dix questions. Pour chaque question, plusieurs réponses sont données et une seule est exacte. Combien de réponses possibles ce professeur doit-il proposer pour chaque question pour qu'un élève qui répondrait au hasard à ce QCM ait en moyenne seulement 2 bonnes réponses sur les 10 questions ?

Exercice 19
Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. On sait que la probabilité qu'une personne contactée réponde au questionnaire est $p = 0,176$. La société effectue 10 appels téléphoniques. On suppose que ces appels sont indépendants. On note X le nombre de personnes qui ont répondu au questionnaire.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne réponde au questionnaire ?
3. Combien faudrait-il faire d'appels téléphoniques au minimum pour que la probabilité qu'au moins une personne réponde au questionnaire soit supérieure à $0,99$?

Exercice 20
Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est de 3%. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \in [0; b]) \geqslant 0,9$.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 21
Dans une très grande entreprise, une étude montre que 53% des salariés se disent stressés par leur travail. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 150 salariés choisis au hasard, associe le nombre de salariés stressés par leur travail.

1. Quelle est la loi suivie par Y ?
2. Déterminer les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(Y \leqslant a) > 0,005$ et b est le plus petit entier tel que $P(Y \leqslant b) \geqslant 0,995$. On pourra utiliser un tableur ou une calculatrice.
3. En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geqslant 0,99$.
4. Comment interpréter le résultat précédent ?