CHAPITRE 5

Loi binomiale

I Succession d'épreuves indépendantes

Définition I.1

On dit que deux épreuves sont **indépendantes** si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre.

Exemple I.1 — Lancer une pièce de monnaie et lancer un dé à six faces sont deux épreuves indépendantes.

Définition I.2

- L'univers d'une succession de n épreuves dont les univers sont Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.
- Une issue est alors un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où x_i est une issue de la i-ème épreuve.

Exemple I.2 — On lance une pièce de monnaie bien équilibrée puis on lance un dé à six faces.

1. Donner l'univers de cette succession d'épreuves indépendantes puis donner une issue possible.
2. Représenter cette succession d'épreuves à l'aide d'un arbre de probabilités. $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.3

Lors d'une sucession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

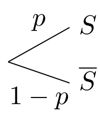
Exemple I.3 — On lance trois pièces de manière indépendante : la première est truquée et tombe sur Pile deux fois plus souvent, la deuxième et la troisième sont bien équilibrées.

1. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
2. Représenter cette succession d'épreuves à l'aide d'un arbre de probabilités.
3. Calculer la probabilité de l'événement $\{(P;F;F)\}$ puis de l'événement « Obtenir une seule fois Pile ». $\longrightarrow$ À rédiger

II Loi de Bernoulli

Définition II.1

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : l'une qu'on appelle « succès » (noté S) dont la probabilité est notée p et l'autre qu'on appelle « échec » (noté $\overline{S}$) dont la probabilité est $1-p$.



Exemple II.1 — Pour chacune des épreuves de Bernoulli suivantes, décrire le succès S et donner sa probabilité p.

1. On choisit une personne au hasard dans la population française et on regarde si c'est une femme.
2. On lance un dé à six faces et on s'intéresse au fait d'obtenir un multiple de 2 ou de 3. $\longrightarrow$ À rédiger

Définition II.2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** si X prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec dans une épreuve de Bernoulli. Sa loi de probabilité est donnée ci-contre.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

Proposition II.3

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

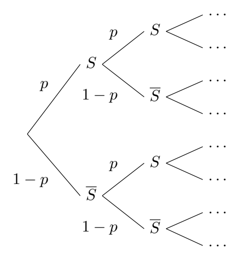
Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

III Loi binomiale

1. Schéma de Bernoulli

Définition III.1

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois de suite de manière **identique** et **indépendante** une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.



Exemple III.1 — Un archer tire trois flèches de suite vers une cible. À chaque lancer, il a une probabilité de $0,9$ d'atteindre le cœur de la cible. On suppose que ses lancers sont indépendants. On définit le succès S : « L'archer touche le cœur de la cible ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.
2. Déterminer tous les chemins contenant exactement deux succès (et donc un échec) et donner pour chacun sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de toucher exactement 2 fois le cœur de la cible sur les trois lancers.
4. On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès (c'est-à-dire au nombre de fois que l'archer touche le cœur de la cible). Déterminer la loi de probabilité de X.

$\longrightarrow$ À rédiger

Proposition III.2

Dans un arbre associé à un schéma de Bernoulli à n répétitions, il y a $\binom{n}{k}$ chemins contenant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs).

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Loi binomiale : loi du nombre de succès

Définition III.3

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Théorème III.4

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité d'avoir k succès est :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple III.2 — Un étudiant doit répondre successivement à 10 questions d'un QCM. Chaque question comporte quatre réponses, dont une seule est exacte. On suppose que le candidat répond au hasard et que les réponses aux questions sont données de manière indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale. Précisez les paramètres de cette loi.
2. Déterminez à 10^{-3} près la probabilité que le candidat :
   (a) obtienne exactement 2 réponses justes
   (b) obtienne au plus 2 réponses justes
   (c) obtienne au moins 2 réponses justes

$\longrightarrow$ À rédiger

Proposition III.5

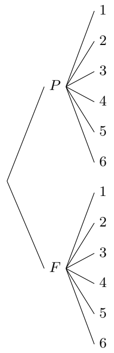
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$.

Exemple III.3 — Si on répond au hasard aux 10 questions d'un QCM, chaque question comportant quatre réponses dont une seule est exacte, à combien de questions répondra-t-on correctement en moyenne ? $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

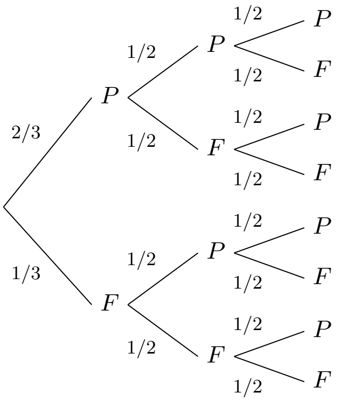
Exemple I.2

1. L'univers est $\{P;F\}\times\{1;2;3;4;5;6\}$. Une issue possible est $(P;3)$.
2. On a l'arbre suivant :



Exemple I.3

1. L'univers est $\{P;F\}\times\{P;F\}\times\{P;F\}$.
2. On a l'arbre suivant :



3. $P(\{P;F;F\}) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$
De même, $P(\{F;P;F\}) = \dfrac{1}{6}$ et $P(\{F;F;P\}) = \dfrac{1}{6}$ donc la probabilité d'obtenir une seule fois Pile est $p = 3\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Exemple II.1

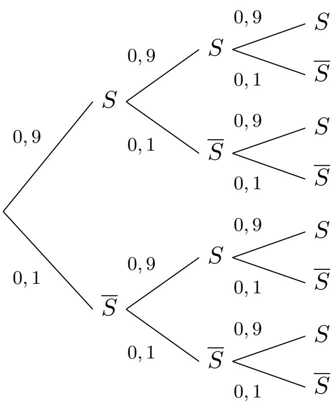
1. S : « La personne choisie est une femme » et $p\approx 0,5$.
2. S : « On obtient un 2, un 3, un 4 ou un 6 » et $p = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Proposition II.3

Espérance : $E(X) = 0\times P(X=0)+1\times P(X=1) = 0\times(1-p)+1\times p = p$.
Variance : $V(X) = (1-p)\times(0-E(X))^2 + p\times(1-E(X))^2 = (1-p)(-p)^2+p(1-p)^2$ donc $V(X) = (1-p)\times p^2 + p(1-2p+p^2) = p^2-p^3+p-2p^2+p^3 = p-p^2 = p(1-p)$

Exemple III.1

1. On a l'arbre suivant :



2. Il y a trois chemins ayant exactement deux succès : le premier ($SS\overline{S}$) a pour probabilité $0,9\times 0,9\times 0,1 = 0,081$, le deuxième ($S\overline{S}S$) a pour probabilité $0,9\times 0,1\times 0,9 = 0,081$ et le troisième ($\overline{S}$SS) a pour probabilité $0,1\times 0,9\times 0,9 = 0,081$.
3. La probabilité de toucher exactement deux fois le coeur de la cible est $3\times 0,081 = 0,243$.
4. On fait la même chose que précédemment pour les chemins ayant zéro, un et trois succès. On a la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3
p_i	$0,01$	$0,027$	$0,243$	$0,729$

Proposition III.2

Dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli, choisir un chemin revient à se donner un n-uplet $(x_1,x_2,...,x_n)$ où x_i vaut S ou $\overline{S}$. Choisir un chemin avec exactement k succès revient à choisir k emplacement parmi les n possibles du n-uplet $(x_1,x_2,...,x_n)$ et à y mettre S. Il y a donc $\dbinom{n}{k}$. Une fois tous les S placés, on complète le n-uplet avec des $\overline{S}$.

Théorème III.4

Dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli, l'événement $X=k$ correspond à tous les chemins ayant exactement k succès. Chacun de ces chemin passe k fois par un succès et $(n-k)$ fois par un échec donc chacun de ces chemins a pour probabilités $p^k(1-p)^{n-k}$. Comme il y a $\dbinom{n}{k}$, on a donc $P(X=k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple III.2

1. On répète 10 fois de suite de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir au hasard à une question (probabilité de succès : $p = 1/4 =$). Comme X compte le nombre de succès, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=1/4$.
2. (a) $P(X=2) = \dbinom{10}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{4}\right)10-2 = 45\times\dfrac{1}{16}\times\dfrac{3^8}{4^8}\approx 0,281$.
   (b) $P(X\leqslant 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0,526$
   (c) $P(X\geqslant 2) = 1-P(X<2) = 1-P(X\leqslant 1) = 1-(P(X=0)+P(X=1))\approx 0,756$

Exemple III.3

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses. X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,25$ donc $E(X) = n\times p = 10\times 0,25 = 2,5$. En moyenne, on répondra correctement à 2,5 questions.

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une succession d'épreuves indépendantes par un arbre et calculer une probabilité
- Savoir calculer une probabilité quand il n'y a pas indépendance avec les formules des probabilités conditionnelles et des probabilités totales
- Savoir reconnaître une épreuve de Bernoulli
- Savoir reconnaître un schéma de Bernoulli et déterminer ses paramètres
- Savoir calculer une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$ dans le cadre d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant loi binomiale

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une succession d'épreuves indépendantes par un arbre et calculer une probabilité
- Savoir calculer une probabilité quand il n'y a pas indépendance avec les formules des probabilités conditionnelles et des probabilités totales
- Savoir reconnaître une épreuve de Bernoulli
- Savoir reconnaître un schéma de Bernoulli et déterminer ses paramètres
- Savoir calculer une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$ dans le cadre d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant loi binomiale

Loi binomiale

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir représenter une succession d'épreuves indépendantes par un arbre et calculer une probabilité
- Savoir calculer une probabilité quand il n'y a pas indépendance avec les formules des probabilités conditionnelles et des probabilités totales
- Savoir reconnaître une épreuve de Bernoulli
- Savoir reconnaître un schéma de Bernoulli et déterminer ses paramètres
- Savoir calculer une probabilité du type $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$ dans le cadre d'une loi binomiale
- Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant loi binomiale