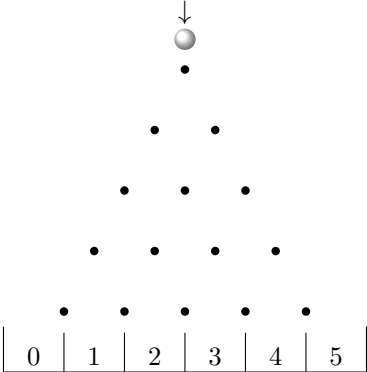


Simulation de la planche de Galton

La planche de Galton est un dispositif inventé par Sir Francis Galton qui permet d’illustrer un schéma de Bernoulli. Elle est constituée d’une planche en bois verticale sur laquelle sont fixées un certain nombre de rangées de clous.



On lance une bille sur cette planche et, à chaque clou rencontré, la bille va à gauche ou à droite du clou avec une probabilité de 0, 5. Elle termine son trajet dans les cases numérotées en bas de la planche. On considère cinq rangées de clous. Une partie consiste à lancer une bille en haut de la planche et on cherche à savoir dans quelle case la bille va arriver. La fonction écrite en langage Python ci-dessous simule une partie :

```
import random

def planche():
    L = [0 for i in range(6)]
    S = 0
    for k in range(0,5):
        S = S + random.randint(0,1)
    L[S] = L[S] + 1
    return L
```

- 1. (a) Que fait l’instruction `L = [0 for i in range(6)]` ?
 - (b) Que représente chacune des deux valeurs renvoyées par l’instruction `random.randint(0,1)` ?
 - (c) Que contient la liste `L` à la fin de l’algorithme ?
 - (d) Tester six fois la fonction et noter les résultats dans le tableau suivant :
- | Case | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de billes | | | | | | |
- 2. (a) On souhaite pouvoir choisir le nombre de billes lancées et obtenir directement les résultats comme à la question précédente. En modifiant la fonction précédente, écrire une fonction `plancheGalton` qui a pour argument un nombre `n` de billes et qui renvoie la même liste `L`.

- (b) Exécuter la fonction précédente pour `n=100000`. Que peut-on constater ?
- 3. On souhaite obtenir les fréquences d’apparition des billes dans chaque case. Compléter la fonction suivante pour qu’elle renvoie la liste `L` contienne la liste des fréquences d’apparition de billes dans chaque case.

```
def plancheGaltonFreq(n):
    L = plancheGalton(n)
    for i in range(0,len(L)):
        ....
    return L
```

- 4. On considère qu’on a un succès chaque fois que la bille passe à droite d’un clou. Le numéro de la case finale correspond donc au nombre de succès obtenus après passage à travers cinq rangées de clous. On note X le nombre de fois où la bille est passée à droite d’un clou.
- (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- (b) Exécuter l’instruction `plancheGaltonFreq(100000)` et comparer avec la question précédente.

Problème de la surréservation

Une compagnie aérienne dispose d’un avion de 150 places. On suppose que, pour chaque client ayant acheté un billet, la probabilité qu’il se présente à l’embarquement est de 90%. Pour cette raison, la compagnie aérienne pratique la surréservation, c’est-à-dire qu’elle vend plus de billets que de places disponibles.

- 1. On suppose que la compagnie vend 170 billets.
- (a) On note X la variable aléatoire représentant le nombre de clients ayant acheté un billet et qui se présentent à l’embarquement. Déterminer la loi de X .
- (b) À l’aide d’un tableur, calculer les valeurs $P(X \leq k)$ pour k entre 0 et 170. On pourra utiliser la formule « = LOI.BINOMIALE(k;n;p;1) ».
- (c) Déterminer la probabilité qu’il y ait des clients ayant acheté un billet qui n’aient pas de place dans l’avion.
- 2. La compagnie veut limiter la surréservation. Elle souhaite que la probabilité qu’un client ayant acheté un billet n’ait pas de place soit inférieure à 0, 02. Elle cherche à déterminer le nombre de billets maximal qu’elle doit vendre pour que cela soit respecté. On considère la variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0, 9$.
- (a) Montrer que le problème revient à déterminer le plus grand entier n tel que $P(X_n \leq 150) < 0, 98$.
- (b) À l’aide d’un tableur, déterminer les valeurs des probabilités $P(X_n \leq 150)$ pour n entier compris entre 150 et 170.
- (c) Conclure.