## Limite de $q^n$

**Exercice 1**
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chaque cas :

1. $u_n = 25 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$
2. $u_n = -7 \times \left(\sqrt{3}\right)^n$
3. $u_n = (-\pi)^n$
4. $u_n = 3^{n+1}$

**Exercice 2**
Calculer la limite de $u_n$ dans chaque cas :

1. $u_n = (0,8^n - 3)\sqrt{n}$
2. $u_n = 3 \times (1 - 5^n)$
3. $u_n = 12 - 3 \times 0,75^n$
4. $u_n = 1 + \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$

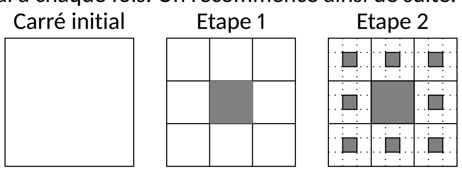
**Exercice 3**
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ :

1. $u_n = \dfrac{3^n}{5^n}$
2. $u_n = \dfrac{4^n + 5}{3^n + 1}$

**Exercice 4**
En septembre 2019, un iceberg de 25 tonnes dérive au large du Groënland. La température locale aidant, il perd 10% de sa masse chaque jour.

1. On note $a_n$ la masse, en kilogramme, de l'iceberg au bout de $n$ jours. Déterminer la limite de la suite $(a_n)$.
2. En déduire qu'un jour, il restera moins d'un kilogramme de glace.
3. Écrire en langage Python une fonction `glace` qui permette de déterminer ce jour.

**Exercice 5**
On dispose d'un carré de côté 1. Dans la première étape, on partage ce carré en neuf carrés et on colore le carré central. Dans la deuxième étape, on divise chaque carré restant en neuf carrés et on colore le carré central à chaque fois. On recommence ainsi de suite.




Pour $n \geqslant 1$ entier naturel, on note $A_n$ l'aire totale coloriée à la $n$-ème étape.

1. Déterminer $A_1$.
2. En remarquant qu'à chaque étape on colorie $1/9$ de la partie blanche, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = A_n - 1$.
   (a) Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis de $A_n$ en fonction de $n$.
   (c) Si on répète ce processus indéfiniment, combien vaudra l'aire colorée ?
4. Compléter le programme écrit en langage Python pour qu'il affiche l'étape à partir de laquelle 90% ou plus de l'aire du carré a été colorée.

```
A = ...
n = ....
while A < ........ :
    A = ......
    n = ......
```

## Théorème de convergence monotone

**Exercice 6**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par $2$ et majorée par $3$.
2. On admet que la suite $(u_n)$ est décroissante. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 7**
On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{14}{3}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant 7$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**Exercice 8**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{0,5u_n^2 + 8}$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. On se propose d'obtenir l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   (a) Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n^2 - 16$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

## Suites monotones non bornées

**Exercice 9**
Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = v_n + n^2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante.
2. Montrer que $(v_n)$ n'est pas majorée.
3. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

**Exercice 10**
Répondre par vrai ou faux à chaque affirmation en justifiant la réponse.

1. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est non majorée.
3. Si une suite est croissante et minorée alors elle tend vers $+\infty$.
4. Si une suite converge vers $2$, elle peut aussi être non majorée.