Suites (2ème partie)

I Comportement des suites géométriques (q^n)

1. Inégalité de Bernoulli

Proposition I.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a > 0$,

$$(1+a)^n \geqslant 1 + an$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.1 — Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$. → À rédiger

2. Limite de q^n

Théorème I.2

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration. (uniquement si $q > 1$) → À rédiger

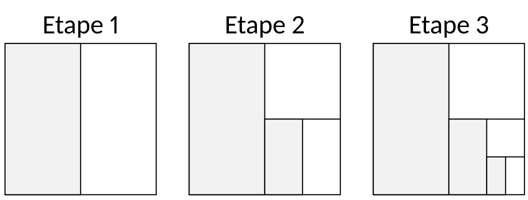
Exemple I.2 — Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = 3^n$
2. $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$
3. $u_n = (-5)^n$
4. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ → À rédiger

Exemple I.3 — Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$:

1. (u_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{-2}{3}$ et de premier terme $u_0 = 5$
2. (v_n) est la suite géométrique de raison $1,3$ et de premier terme $v_0 = -2$ → À rédiger

Exemple I.4 — À partir d'un carré de côté 1, on construit successivement les rectangles colorés de la façon suivante :



Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, note a_n l'aire du rectangle coloré à l'étape n et S_n l'aire de toute la surface colorée à l'étape n.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4} \times a_n$.
2. Exprimer S_n en fonction de n et étudier la limite de la suite (S_n).

II Monotonie et convergence

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définition II.1

Soit (u_n) une suite.

- On dit que cette suite est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. Dans ce cas, M s'appelle un majorant de la suite (u_n).
- On dit que cette suite est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n$. Dans ce cas, m s'appelle un minorant de la suite (u_n).
- On dit que cette suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple II.1 — Dans chaque cas, montrer que la suite (u_n) est bornée.

1. $u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \cos(n)$
3. $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$

$\longrightarrow$ À rédiger

Exemple II.2 — Montrer que la suite de terme général 2^n n'est pas majorée. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Suites croissantes majorées

Théorème II.2 (Théorème de convergence monotone)

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée par M, alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée par m, alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant m$.

Remarque — Il se peut que la limite ne soit pas égale au majorant ou au minorant.

Exemple II.3 — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente puis trouver sa limite ℓ.
   On admettra que ℓ vérifie l'équation $\ell = \sqrt{1 + \ell}$.

$\longrightarrow$ À rédiger

3. Suites croissantes non majorées

Proposition II.3

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple II.4 — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas majorée.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

$\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Proposition I.1
Initialisation. Si $n = 0$, d'une part $(1+a)^0 = 1$ et, d'autre part, $1 + a \times 0 = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1 + a \times 0$.
Hérédité. Soit n un entier naturel. On suppose que $(1+a)^n \geqslant 1 + an$. Montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a(n+1)$.
On sait que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ donc $(1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$ (car $1 + a > 0$).
Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+a^2n$ c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a(n+1) + a^2n$.
Or, $a^2n \geqslant 0$ donc $1 + a(n+1) + a^2n \geqslant 1 + a(n+1) + 0$ c'est-à-dire $1 + a(n+1) + a^2n \geqslant 1 + a(n+1)$.
On a donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a(n+1)$ ce qui démontre l'hérédité.

Exemple I.1
D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier naturel n,

$$4^n = (1+3)^n \geqslant 1 + 3n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3n = +\infty$, alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Théorème I.2
Si $q > 1$ alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geqslant 1 + na$. Comme $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + an = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparason, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exemple I.2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $3 > 1$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $-1 < \dfrac{-1}{2} < 1$.
3. (u_n) n'a pas de limite car $-5 < 1$.
4. Comme $\dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$.

Exemple I.3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \dfrac{-2}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = 0$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times 1,3^n$. Comme $1,3 > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,3^n = +\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exemple I.4

1. Si L et ℓ sont la longueur et la largeur du n-ème rectangle alors $L' = \dfrac{1}{2} \times L$ et $\ell' = \dfrac{1}{2} \times \ell$ sont les longueur et largeur du $n+1$-ème rectangle. L'aire du $n+1$-ème rectangle est donc : $L' \times \ell' = \dfrac{1}{2}L \times \dfrac{1}{2}\ell = \dfrac{1}{4}L\ell'$. L'aire du $n+1$-ème rectangle vaut donc un quart de l'aire du n-ème rectangle.
2. La suite (a_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_1 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   On a donc :
   $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$
   Ainsi, $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$
   Donc $S_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{2}{3} \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$
   Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{3}$.

Exemple II.1

1. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc la suite est bornée.
2. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ donc la suite est bornée.
3. Pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ donc $2 + \dfrac{1}{n} \geqslant 2$.
   De plus, la suite $\dfrac{1}{n}$ est décroissante donc, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{1} = 1$. On en déduit que $2 + \dfrac{1}{n} \leqslant 3$.
   Ainsi, $2 \leqslant 2 + \dfrac{1}{n} \leqslant 3$ donc la suite est bornée.

Exemple II.2
Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Cela veut dire que pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel $u_n \geqslant A$. Par suite, quelque soit le réel M, il existera toujours un n tel que $u_n > M$. La suite n'est donc pas majorée.

Exemple II.3

1. *Initialisation.* Si $n = 0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$. On a donc bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.

   Hérédité. Soit n un entier naturel. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. Montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$.

   On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

   donc $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 1 + u_{n+1} \leqslant 1 + 2$

   d'où $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{1+u_{+1}} \leqslant \sqrt{3}$.

   On a donc $\sqrt{1} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \sqrt{3}$.

   Comme $\sqrt{1} \geqslant 0$ et que $\sqrt{3} \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. L'hérédité est donc vérifiée.

2. D'après la question précédente :

   - (u_n) est croissante
   - (u_n) est majorée par 2

   D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \leqslant 2$.

   $\ell = \sqrt{1+\ell} \iff \ell^2 = 1 + \ell \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0$

   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$

   $\ell = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61$ ou $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61$

   Comme $0 \leqslant \ell \leqslant 2$ alors $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Proposition II.3

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$.
Comme (u_n) est croissante, alors $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0}$.
Donc, $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$. Cela veut dire que les u_n sont dans l'intervalle $[A; +\infty[$ dès que n est assez grand. Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple II.4

1. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n + n - u_n = n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

2. Si la suite était majorée, et puisqu'elle est croissante, elle serait convergente d'après le théorème de convergence monotone. Si on note ℓ sa limite, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, d'autre part, par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + n = +\infty$. Comme $u_{n+1} = u_n + n$, on aurait donc $\ell = +\infty$, ce qui est absurde. La suite n'est donc pas majorée.

3. Puisque la suite est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Suites (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer la limite d'une suite du type q^n
- Savoir montrer qu'une suite est majorée ou minorée
- Savoir qu'une suite croissante et majorée est convergente
- Savoir qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Suites (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer la limite d'une suite du type q^n
- Savoir montrer qu'une suite est majorée ou minorée
- Savoir qu'une suite croissante et majorée est convergente
- Savoir qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Suites (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir déterminer la limite d'une suite du type q^n
- Savoir montrer qu'une suite est majorée ou minorée
- Savoir qu'une suite croissante et majorée est convergente
- Savoir qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$