

Principes additif et multiplicatifs

Exercice 1

Dans un restaurant, un menu propose pour finir le repas de prendre soit un fromage, soit un dessert. Il y a sept sortes de fromages disponibles sur la carte et six desserts sont proposés. Combien y a-t-il de façons de finir le repas avec ce menu ?

Exercice 2

Pour choisir sa tenue pour son cours d’EPS, un élève a le choix entre trois survêtements et quatre paires de baskets. Combien de tenues différentes peut-il choisir ?

Exercice 3

On se place dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer le nombre de points de ce repère dont l'abscisse est un nombre entier compris entre -2 et 2 (inclus) et dont l'ordonnée est nombre entier compris entre 1 et 3 (inclus).

Exercice 4

Combien existe-t-il de nombres à trois chiffres ? (sachant que le premier chiffre n'est pas 0)

Exercice 5

La plaque d’immatriculation d’un véhicule est composée de :

- deux lettres différentes de O, I et U (pour ne pas confondre avec 0, 1 et V)
- trois chiffres entre 0 et 9
- encore deux lettres distinctes de O, I et U

1. Déterminer le nombre de plaques possibles selon ce système.
2. En pratique, les séries SS et WW sont exclues pour le bloc de gauche et la série SS est exclue pour le bloc de droite. Le nombre 000 est aussi exclu du bloc du milieu. Montrer qu’il y a alors 277 977 744 plaques possibles.

Exercice 6

En 1961, l'auteur Raymond Queneau écrit un ouvrage intitulé « Cent mille milliards de poèmes ». Ce livre est composé de 10 pages contenant chacune 14 bandelettes avec un vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages, le deuxième vers de l’une des 10 pages et ainsi de suite jusqu’au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

k -uplets d’un ensemble

Exercice 7

Le code PIN d'un téléphone est un code confidentiel à quatre chiffres formé avec les chiffres 0, 1, 2, ... et 9.

1. Combien de codes PIN différents sont possibles ?
2. Combien de codes PIN commencent par le chiffre 5 ?

Exercice 8

En informatique, la norme ASCII est une norme de codage des caractères dans laquelle chaque caractère est représenté par un nombre de 8 chiffres valant 0 ou 1. Par exemple, le caractère « A » est représenté par 01000001 et le caractère « 3 » est représenté par 00110011. Combien de caractères différents peut-on représenter dans le code ASCII ?

Exercice 9

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, contient 10 questions. Pour chaque question, quatre réponses possibles sont proposées, numérotées a, b, c et d . De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 10

Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple $(0, 6)$ que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

1. Combien de numéros de téléphones commençant par 06 sont possibles ?
2. Combien de numéros de téléphones commençant par 06 ou 07 sont possibles ?

k -uplets d’éléments distincts

Exercice 11

Le championnat de Ligue 1 est constitué de 20 équipes. Combien de podiums sont potentiellement possibles à la fin d’une saison ?

Exercice 12

Alexandra joue au Scrabble. Elle a devant elle un ensemble de sept jetons avec les lettres : A, C, E, F, M, O, R. Combien de mots de quatre lettres, ayant un sens ou non, peut-elle former avec ces jetons ?

Exercice 13

Lors de la finale d’un tournoi de football, les deux équipes sont à égalité et doivent participer à une séance de tirs au but. L'entraîneur d'une des deux équipes doit désigner une liste ordonnée de cinq tireurs parmi les onze joueurs de son équipe. Combien de choix a-t-il pour cela ?

Exercice 14

Dans une classe de Terminale, il y a 16 filles et 15 garçons. On doit désigner les délégués de classe ainsi que leurs suppléants de la façon suivante : un des délégués de classe et son suppléant sont des garçons et l'autre déléguée de classe et sa suppléante sont des filles. De combien de façons cela est-il possible ?

Permutations

Exercice 15

Écrire toutes les permutations possibles du mot BAC.

Exercice 16

Un livreur s'apprête à délivrer un colis à cinq clients. De combien de façons différentes peut-il organiser sa tournée ?

Exercice 17

Un DJ a sélectionné cinq musiques rock et 4 musiques rap. Il veut d'abord passer toutes les musiques rock puis toutes les musiques rap. De combien de façons peut-il le faire ?

Exercice 18

Déterminer le nombre d’anagrammes des mots suivants :

1. BOB
2. ANANAS
3. MISSISSIPPI

Exercice 19

Un Secret Santa est une tradition anglo-saxonne dans laquelle des personnes s'offrent des cadeaux de manière anonyme. Un groupe d'élèves souhaitant organiser un Secret Santa a écrit le programme en Python suivant :

```
import random

def perm_alea(L):
    n = len(L)
    m = n
    P = [0] * n #P = [0, 0, ..., 0]
    for i in range(1, n+1):
        k = random.randint(0,m-1)
        P[i-1] = L[k]
        del L[k]
        m = m - 1
    return P
```

1. Recopier et compléter le tableau suivant dans le cas où on exécute la fonction `perm_alea` avec comme argument $L = [1, 2, 3, 4]$. Dans le tableau, on a précisé les différentes valeurs prises par la variable k .

m	i	k	L	P
4	1	2		
		1		
		2		
		1		

2. Quel est le rôle de ce programme ?
3. Quel est l’inconvénient de ce programme si l'on souhaite l'utiliser pour organiser un Secret Santa ?

Parties d'un ensemble

Exercice 20

Un magicien dispose de 10 cartes. Il demande à un spectateur de piocher autant de cartes qu'il le souhaite pour former un tas. Combien de tas sont-ils possibles ?

Exercice 21

Un professeur doit choisir un groupe d'élèves dans sa classe de 35 élèves pour partir en voyage. Il peut choisir de prendre autant d'élèves qu'il le souhaite (même aucun ou tous). Combien de groupes est-il possible de former ?

Exercice 22

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. (a) Combien de parties possède cet ensemble ?
(b) Faire la liste des parties de cet ensemble à deux éléments.
2. On considère la fonction en Python ci-dessous :

```
def generer_parties(n):
    L = []
    for i in range(1,n):
        for j in range(i+1,n+1):
            L.append([i,j])
```

2. (a) Exécuter ce programme pour $n=4$. Qu'obtient-on ?
(b) Quel est le rôle de ce programme ?
3. Modifier la fonction `generer_parties` afin qu'elle génère toutes les parties à 3 éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Combinaisons

Exercice 23

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer toutes les combinaisons à 2

éléments de E et en déduire le nombre $\binom{4}{2}$.

Exercice 24

Déterminer les nombres suivants puis vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice :

1. $\binom{6}{2}$
2. $\binom{10}{4}$
3. $\binom{8}{3}$
4. $\binom{6}{1}$
5. $\binom{5}{0}$

Exercice 25

A la fin d'une course de 100m, le comité anti-dopage décide de choisir trois coureurs pour leur faire passer un test. De combien de façons cela est-il possible ?

Exercice 26

Lorsqu'il entre en Première générale, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze officiellement proposées. Combien de triplètes sont-elles possibles ?

Exercice 27

On considère un groupe de 20 personnes. Si chaque personne serre la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 28

Au Loto, pour valider une grille, un joueur doit cocher cinq numéros parmi les nombres allant de 1 à 49 puis il doit cocher un numéro « chance » parmi les nombres de 1 à 10. Combien de grilles possibles peut-on valider ?

Exercice 29

Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débiteront un match. Il a 23 joueurs à sa disposition.

1. Sans prendre en compte le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
2. Parmi les 23 joueurs, il y a 3 gardiens, 8 défenseurs, 5 milieux de terrain et 7 attaquants. Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrain et de trois attaquants, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces contraintes ?

Exercice 30

Sans faire de calcul, déterminer les nombres $\binom{200}{199}$ et $\binom{200}{198}$.

Relation et triangle de Pascal

Exercice 31

Soit n un entier naturel non nul et k tel que $1 \leq k \leq n - 1$.

Démontrer par le calcul la relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Exercice 32

On donne les nombres $\binom{50}{46} = 230300$ et $\binom{50}{45} = 2118760$.

Déterminer $\binom{51}{46}$.

Exercice 33

Lors d'un incendie, le chef des pompiers doit créer une équipe de 4, 5 ou 6 soldats du feu pour entrer dans le bâtiment en flammes. Il dispose pour cela de 8 personnes.

1. Déterminer les coefficients $\binom{8}{4}$, $\binom{8}{5}$ et $\binom{8}{6}$ à l'aide du triangle de Pascal.
2. En déduire le nombre d'équipes différentes que le chef des pompiers peut former.
3. Combien d'équipes différentes pourrait-il former s'il n'avait que 7 hommes à sa disposition ?

Exercice 34

On donne le programme suivant :

```
def Pascal(n):
    L = [1]
    M = L
    for i in range(1,n+1):
        M = M + [1]
        for k in range(i-1):
            M[k+1] = L[k+1] + L[k]
        L = M
    return L
```

1. Que va renvoyer ce programme si on l'exécute pour $n=2$? $n=3$?
2. Quel est le rôle de ce programme ?

Problèmes

Exercice 35

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 2 carreaux et 3 piques ?
3. contenant 5 carreaux ou 5 piques ?

Exercice 36

Un robot est situé sur une grille au point de coordonnées $(0, 0)$. Il ne se déplace que d'une unité à chaque fois, soit vers la droite, soit vers le haut.

De combien de façons différentes peut-il rejoindre le point de coordonnées $(4, 6)$?

Exercice 37

L'ADN est constitué de triplets de quatre nucléotides, représentés par A, T, G et C. Les triplets peuvent comporter plusieurs fois la même base (comme AAA), et deux triplets comportant les mêmes bases mais dans un ordre différent sont différents (ATG n'est pas le même que GTA).

1. Combien y a-t-il de triplets possibles ?
2. Sachant que chaque triplet amène à la synthèse d'un acide aminé, qu'il y a 20 acides aminés différents et qu'il faut que chaque acide aminé soit codé par au moins un triplet, pourquoi l'unité codante de base est un triplet et non pas un doublet ?