Combinatoire et dénombrement

I Principes additif et multiplicatif

1. Rappels sur les ensembles

Définition I.1

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que E et F sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire lorsque $E \cap F = \emptyset$.
- On dit que F est inclus dans E si tous les éléments de F appartiennent à E. On note $F \subset E$.

Exemple I.1 — Dans chaque cas, que peut-on dire des ensembles E et F ?
1. $E = \{4, 5, 6\}$ et $F = \{10, 12, 15\}$ 2. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $F = \{1, 4, 5\}$ $\longrightarrow$ À rédiger

2. Principe additif

Proposition I.2 (principe additif)

Soit E un ensemble fini à n élements et F un ensemble fini à m éléments.
Si E et F sont disjoints alors $E \cup F$ possède exactement $n + m$ éléments.

Exemple I.2 — Sur une étagère, il y a trois romans de Victor Hugo et deux romans de Balzac. Si on doit choisir un livre, combien de choix sont possibles ? $\longrightarrow$ À rédiger

3. Principe multiplicatif

Définition I.3

Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** $E \times F$ (« E croix F ») est l'ensemble des couples $(x; y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Remarque — Plus généralement, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ de k ensembles non vides est l'ensemble des listes $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_k \in E_k$.

Exemple I.3 — À l'aide d'un arbre, déterminer $E \times F$ lorsque $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.4 (Principe multiplicatif)

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et F un ensemble fini non vide à m éléments.
L'ensemble $E \times F$ possède $n \times m$ éléments.

Exemple I.4 — Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble $G = \{a, b, c\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.5 — Dans un jeu de cartes, on a retiré tous les 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, ainsi que tous les trèfles.

1. Déterminer deux ensembles E et F qui permettent de considérer chacune des cartes de ce jeu comme un élément du produit cartésien $E \times F$.
2. Déterminer le nombre de cartes dans ce jeu. $\longrightarrow$ À rédiger

Définition I.5

Soit k un entier naturel non nul. L'ensemble $E \times E \times \cdots \times E$ se note E^k et ses éléments s'appellent des **k-uplets** ou **k-listes** de E.

Remarque — Un k-uplet de E est donc une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de k éléments de E.

Exemple I.6 — Déterminer tous les 3-uplets (on dit aussi triplets) de l'ensemble $E = \{0; 1\}$. On pourra s'aider d'un arbre. $\longrightarrow$ À rédiger

II Dénombrement des k-uplets d'un ensemble

1. Nombre de k-uplets d'un ensemble

Proposition II.1

Soit k un entier naturel non nul et soit E un ensemble fini à n éléments.
Le nombre de k-uplets de E est n^k.

Exemple II.1 — On lance trois fois de suite un dé à six faces et on note à chaque fois, dans l'ordre, le numéro sorti. Combien y a-t-il de résultats possibles ? → À rédiger

Exemple II.2 — Combien de mots de passe de 4 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ? → À rédiger

2. Nombre de k-uplets d'éléments distincts

Proposition II.2

Soit k un entier naturel non nul et soit E un ensemble fini à n éléments.
Le nombre de k-uplets d'éléments **distincts** (c'est-à-dire qui ne contiennent pas deux fois le même élément) est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Démonstration. → À rédiger

Remarque — Un k-uplet d'éléments distincts s'appelle aussi un **arrangement**.

Exemple II.3 — Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Combien y a-t-il de couples (2-uplets) d'éléments distincts de E ?
2. Écrire la liste de tous ces couples d'éléments distincts. → À rédiger

Exemple II.4 — Dans une classe de 30 élèves, on doit former un comité composé d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire. Combien y a-t-il de comités possibles ? → À rédiger

Exemple II.5 — Le digicode d'un immeuble est un nombre composé de cinq chiffres parmi 0, 1, 2 et 3 suivi de deux lettres distinctes parmi A, B et C (par exemple, 10214BC). Combien y a-t-il de codes possibles ? → À rédiger

3. Permutations

Définition II.3

Soit E un ensemble fini à n éléments. Une **permutation** est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Remarque — Autrement dit, une permutation contient tous les éléments de E dans un certain ordre.

Exemple II.6 — Déterminer toutes les permutations de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. → À rédiger

Définition II.4

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle** de n le nombre noté $n!$ (« factorielle n ») égal à

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Remarque — Par convention, on pose $0! = 1$.

Proposition II.5

Soit E un ensemble fini à n éléments. Il y a exactement $n!$ permutations de E.

Exemple II.7 — Huit athlètes s'élancent au départ d'une course de 100m. S'il n'y a pas d'abandon, ni d'ex-aequo, combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ? → À rédiger

Exemple II.8 — Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ? → À rédiger

III Dénombrement des parties d'un ensemble

1. Nombre de parties d'un ensemble

Définition III.1

Soit E un ensemble. Un ensemble F s'appelle une partie de E si F est inclus dans E ($F \subset E$).

Exemple III.1 — 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Donner une partie F de E qui possède deux éléments.
2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Déterminer toutes les parties de E. → À rédiger

Proposition III.2

Soit E un ensemble fini à n éléments. Alors E possède exactement 2^n parties.

Démonstration. → À rédiger

2. Combinaisons

Définition III.3

Soit E un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

- On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E qui possède k éléments.
- Le nombre de combinaisons de k éléments de E se note $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Exemple III.2 — Déterminer toutes les combinaisons de 2 éléments de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$. → À rédiger

Proposition III.4

Soit n un entier naturel et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple III.3 — Déterminer les nombres suivants :

1. $\binom{5}{2}$
2. $\binom{10}{3}$
3. $\binom{7}{0}$

→ À rédiger

Exemple III.4 — Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Déterminer $\binom{n}{k}$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = n$ puis interpréter le résultat. → À rédiger

Exemple III.5 — Dans une classe de 35 élèves, un professeur doit choisir un groupe de 6 élèves pour partir en voyage. Combien de groupes possibles y a-t-il ? → À rédiger

Exemple III.6 — Dans sa bibliothèque, Sacha possède 10 revues scientiques et 8 romans. Avant de partir en vacances, il décide d'emporter 3 revues et 2 romans. Combien de possibilités a-t-il de choisir ce qu'il va emporter ? → À rédiger

Proposition III.5 (Symétrie)

Soit n un entier naturel et k un entier naturel inférieur ou égal à n.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple III.7 — Déterminer les nombres $\binom{10}{9}$ et $\binom{8}{6}$. → À rédiger

3. Relation et triangle de Pascal

Proposition III.6 (Relation de Pascal)

Soit n un entier naturel et k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration. → À rédiger

Exemple III.8 — On donne $\binom{7}{1} = 7$ et $\binom{7}{2} = 21$. En déduire la valeur de :

1. $\binom{8}{2}$ 2. $\binom{8}{6}$ → À rédiger

Proposition III.7

Pour déterminer les nombres $\binom{n}{k}$, on peut construire un tableau à double entrée, k horizontalement et n verticalement, tel que :

- les nombres de la première colonne valent 1 car $\binom{n}{0} = 1$
- les nombres de la diagonale valent 1 car $\binom{n}{n} = 1$
- chaque autre nombre est la somme du nombre situé juste au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche car $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Ce tableau s'appelle le **triangle de Pascal**.

Exemple III.9 —

1. Construire le triangle de Pascal pour $n = 8$ et $k = 8$.
2. En déduire la valeur de $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{8}{3}$. → À rédiger

Proposition III.8

La somme des éléments de la ligne d'indice n du triangle de Pascal vaut 2^n. Autrement dit, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. → À rédiger

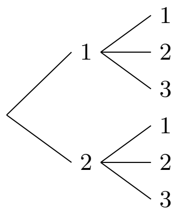
Solutions

Exemple I.1

1. E et F sont disjoints.
2. F est inclus dans E.

Exemple I.2
$E = \{$romans de V. Hugo$\}$ et $F = \{$romans de Balzac$\}$. Ces deux ensembles sont disjoints donc, d'après le principe additif, l'ensemble des livres possibles $E \cup F$ possède $3 + 2 = 5$ éléments. Il y a donc 5 choix possibles.

Exemple I.3



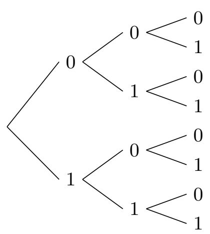
Ainsi, $E \times F = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (2;3)\}$.

Exemple I.4
$\{a, b, c\}$ possède 3 éléments et $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ possède 5 éléments donc G possède $3 \times 5 = 15$ éléments.

Exemple I.5

1. $E = \{$As, Roi, Dame, Valet$\}$ et $F = \{$Coeur, Carreau, Pique$\}$
2. E possède 4 éléments et F possède 3 éléments donc, d'après le principe multiplicatif, il y a $4 \times 3 = 12$ cartes dans ce jeu.

Exemple I.6



Comme chaque chemin correspond à un triplet différent, il y a donc 8 triplets qui sont : $(0, 0, 1)$; $(0, 0, 1)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 0, 1)$; $(1, 0, 1)$; $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$

Exemple II.1
Un résultat possible est un 3-uplet de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donc il y a $6^3 = 216$ résultats possibles.

Exemple II.2
Un mot de passe est un 4-uplet de l'ensemble $E = \{a, b, c, \cdots, z\}$. Il y a donc $26^4 = 456976$ mots de passe possibles.

Proposition II.2
Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de E, il y a n possibilités pour le premier élément, puis $(n-1)$ possibilités pour le deuxième élément (car on ne peut pas reprendre le premier), puis $(n-2)$ possibilités pour le troisième éléments (car on ne peut pas reprendre les deux premiers), etc. puis il reste $(n - (k-1))$ pour le k-ème élément.
D'après le principe multiplicatif, le nombre de tels k-uplets est :

$$n \times (n-1) \times \cdots (n-(k-1)) = n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1)$$

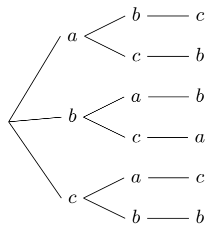
Exemple II.3

1. E possède $n = 4$ éléments. Il y a donc $4 \times 3 = 12$ couples possibles.
2. (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)

Exemple II.4
Un comité est un 3-uplet d'éléments distincts de l'ensemble des élèves de la classe (le premier élément du triplet est le président, le 2ème est le vice-président et le 3ème est le secrétaire). Il y a donc $30 \times 29 \times 28 = 24360$ comités possibles.

Exemple II.5
Pour la partie des chiffres : il s'agit d'un 5-uplet d'éléments de $E = \{0, 1, 2, 3\}$ donc il y a $4^5 = 1024$ possibilités.
Pour la partie des lettres : il s'agit d'un couple d'éléments distincts de $E = \{A, B, C\}$ donc il y a $3 \times 2 = 6$ possibilités.
D'après le principe multiplicatif, il y a donc $1024 \times 6 = 6144$ codes possibles.

Exemple II.6



Les permutations sont donc (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) et (c, b, a).

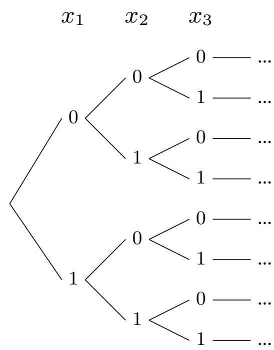
Exemple II.7
Un ordre d'arrivée est une permutation des huit athlètes. Il y a donc $8! = 1 \times 2 \times \cdots \times 8 = 40320$ ordres d'arrivée possibles.

Exemple II.8
Un anagramme du mot MATHS est une permutation des lettres M, A, T, H et S. Il y a donc $5! = 125$ anagrammes de ce mot (124 si on ne compte pas le mot MATHS).

Exemple III.1

1. $F = \{1, 4\}$
2. $\varnothing$, $\{a\}$,$\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

Proposition III.2
Pour former une partie F de E, on passe en revue, dans l'ordre les éléments x_i de E. Si un élément x_i est dans F, on attribue la valeur 1 et s'il n'y est pas, on attribue la valeur 0.
Autrement dit, à chaque partie de F on peut faire correspondre un unique n-uplet de $\{0, 1\}$. Comme il y a 2^n tels n-uplets, cela veut dire qu'il y a bien 2^n parties de E.
Remarque : On peut aussi voir cela avec un arbre :



Chaque fois qu'un élément est dans F, on passe par 1 et sinon, on passe par 0. Chaque partie correspond donc à un unique chemin. Comme il y a 2^n chemins possibles, cela veut bien dire qu'il y a 2^n parties.

Exemple III.2
On a vu dans l'exemple III.1 que les combinaisons à deux éléments de $E = \{a, b, c\}$ sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$.

Exemple III.3

1. $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2!} = \frac{20}{1 \times 2} = 10.$
2. $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{720}{1 \times 2 \times 3} = 120.$
3. $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0! \times (7-0)!} = \frac{7!}{7!} = 1.$

Exemple III.4

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. En effet, il n'y a qu'une seule partie à 0 éléments : c'est l'ensemble vide.
2. $\binom{n}{0} = \frac{n}{1!} = \frac{n}{1} = n$. En effet, il y a n parties à 1 élément (ce sont les singletons $\{x\}$ contenant chacun à un élément x de E).
3. $\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$.
4. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$. En effet, il n'y a qu'une seule partie à n éléments dans un ensemble à n éléments : c'est l'ensemble lui-même.

Exemple III.5
Choisir un groupe de 6 élèves revient à choisir une partie à 6 éléments dans un ensemble à 35 éléments. Une calculatrice donne $\binom{35}{6} = 1623160$.

Exemple III.6
Il choisit trois revues parmi 10 : cela donne $\binom{10}{3} = 120$ possibilités.

Il choisit ensuite 2 romans parmi 8 : cela donne $\binom{8}{2} = 28$ possibilités.

D'après le principe multiplicatif, il a au total $\binom{10}{3} \times \binom{8}{2} = 120 \times 28 = 3360$ possibilités.

Exemple III.7
$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$ et $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2!} = 28.$

Proposition III.5
On a :
$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!n!} = \binom{n}{k}$

Proposition III.6
Soit E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Déterminons le nombre de parties de E à k éléments de deux façons différentes :

1. Tout d'abord, on sait que le nombre de parties à k éléments est $\binom{n}{k}$.
2. Soit a un élément de E. Si F est une partie de E à k éléments, il y a deux situations possibles disjointes :
   - soit F contient a et, pour construire F dans ce cas, il reste à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments restants de E. Cela donne $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités pour F.
   - soit F ne contient pas a et, pour construire F dans ce cas, il s'agit de choisir k éléments parmi $n-1$ (tous les éléments sauf a). Cela donne $\binom{n-1}{k}$ possibilités pour F.

   D'après le principe additif, cela donne $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ possibilités.

Cela démontre donc que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exemple III.8

1. $\binom{8}{2} = \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 7 + 21 = 28$
2. $\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = 28$

Proposition III.9
1. On a le tableau suivant :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

2. $\binom{4}{3} = 4$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{7}{3} = 35$ et $\binom{8}{3} = 56$.

Proposition III.8
Soit E un ensemble à n éléments. Comptons le nombre de parties de E de deux façons différentes.

1. D'une part, on sait tout d'abord qu'il possède 2^n parties.
2. E possède $\binom{n}{0}$ parties à 0 éléments, $\binom{n}{1}$ parties à un éléments, ..., $\binom{n}{n}$ parties à n éléments. D'après le principe additif, E possède au total $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$ parties au total.

Cela montre donc que $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Combinatoire et dénombrement

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les principes additifs et multiplicatifs pour dénombrer
- Savoir déterminer le nombre de k-uplets d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de k-uplet d'éléments distincts d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de permutations de n éléments
- Savoir déterminer le nombre de parties d'un ensemble
- Savoir ce qu'est une combinaison de k éléments d'un ensemble
- Savoir calculer $\binom{n}{k}$ à partir d'une formule
- Connaître la relation de symétrie et la relation de Pascal
- Savoir construire le triangle de Pascal
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer

Combinatoire et dénombrement

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les principes additifs et multiplicatifs pour dénombrer
- Savoir déterminer le nombre de k-uplets d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de k-uplet d'éléments distincts d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de permutations de n éléments
- Savoir déterminer le nombre de parties d'un ensemble
- Savoir ce qu'est une combinaison de k éléments d'un ensemble
- Savoir calculer $\binom{n}{k}$ à partir d'une formule
- Connaître la relation de symétrie et la relation de Pascal
- Savoir construire le triangle de Pascal
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer

Combinatoire et dénombrement

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir utiliser les principes additifs et multiplicatifs pour dénombrer
- Savoir déterminer le nombre de k-uplets d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de k-uplet d'éléments distincts d'un ensemble
- Savoir déterminer le nombre de permutations de n éléments
- Savoir déterminer le nombre de parties d'un ensemble
- Savoir ce qu'est une combinaison de k éléments d'un ensemble
- Savoir calculer $\binom{n}{k}$ à partir d'une formule
- Connaître la relation de symétrie et la relation de Pascal
- Savoir construire le triangle de Pascal
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer
- Savoir utiliser un arbre, un diagramme, un tableau pour dénombrer