Compléments sur la dérivation — Sujets de bac

## D'après Bac ES — Antilles-Guyane Juin 2019

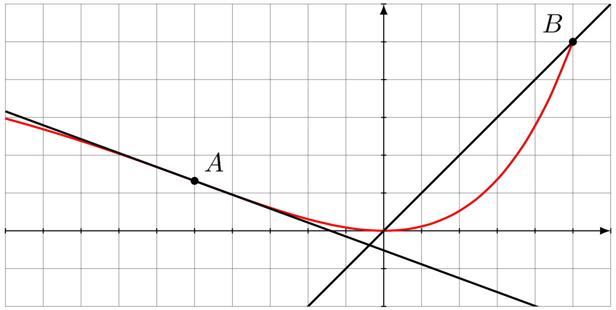
Dans la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

— la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$ ;

— la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-5$ ;

— la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ ;

— le domaine $S$ situé entre la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$, grisé sur la figure.




**Partie A**

*Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.*

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

**Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.**

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente $T$ est :

   (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-3$ (c) $3$ (d) $\frac{1}{3}$

2. La fonction $f$ semble :

   (a) concave sur $[-5\ ;\ 0]$ (b) concave sur $[-10\ ;\ 0]$ (c) convexe sur $[-10\ ;\ 5]$
   (d) convexe sur $[-5\ ;\ 5]$

3. L'aire du domaine $S$, en unité d'aire, appartient à l'intervalle :

   (a) $[-4\ ;\ -2]$ (b) $[4\ ;\ 7]$ (c) $[0\ ;\ 3]$ (d) $[7\ ;\ 10]$

**Partie B**

La fonction $f$ précédente, définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$, a pour expression $f(x) = (x-5)\mathrm{e}^{0,2x} + 5$.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$.

   (a) Montrer que $f'(x) = 0,2x\mathrm{e}^{0,2x}$.

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$.

   (c) Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-5$.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | $g(x) = 0,2x * \exp(0,2x)$<br>$\rightarrow g(x) = \frac{1}{5}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$ |
| 2 | Dérivée $g'(x) = \frac{1}{25}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$ |

   (a) En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de $f$, notée $f''$, est définie par $f''(x) = (0,2 + 0,04x)\mathrm{e}^{0,2x}$.

   (b) Étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$.

**Compléments sur la dérivation — Sujets de bac**

## D'après Centres Etrangers 22 mars 2023 Sujet 2

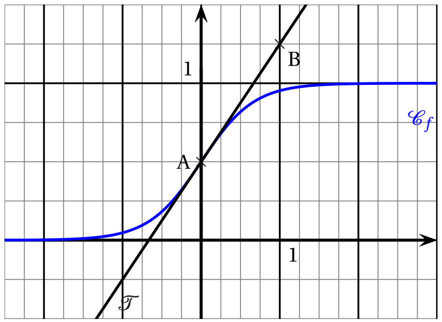
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0$.




**Partie A : lectures graphiques**

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction $f$ semble convexe ou concave.

**Partie B : étude de la fonction**

1. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'$.
2. Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Partie C : Tangente et convexité**

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0$.
   On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note $f''$ la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.
   On admet que $f''$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction $f''$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction $f$ est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$ ?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   Justifier la réponse.

Compléments sur la dérivation — Sujets de bac

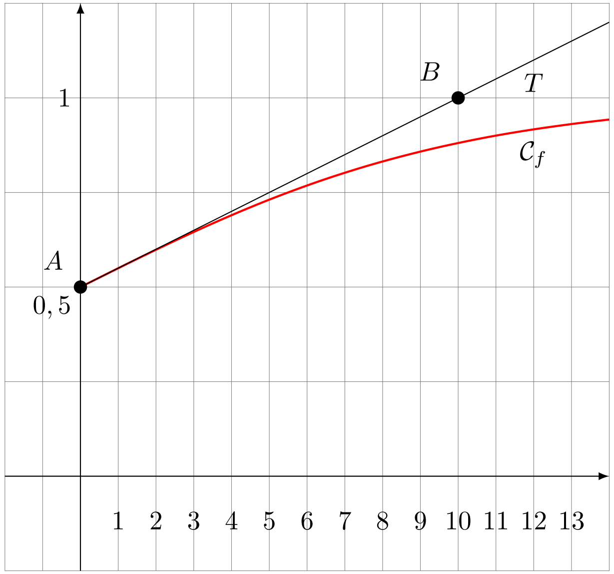
## D'après Bac S — Antilles-Guyane Juin 2019

**Partie A**

Soit $a$ et $b$ des nombres réels. On considère une fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction $f$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).




1. Justifier que $a = 1$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$.

2. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer $b$.

**Partie B**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction $p$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

Le réel $x$ représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après $x$ années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction $p$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. (a) Déterminer $p''(x)$ pour tout réel $x$.

   (b) Alice affirme que la croissance de la proportion d'individus qui possèdent ce type d'équipement ne fait que ralentir. Que penser de cette affirmation ? Justifier.

## D'après Centres Etrangers 9 juin 2021 Sujet 1

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\text{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel $x$ :

   $$g'(x) = \frac{-2}{3}\text{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout $x$ réel.

**Partie B :**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = 2\text{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   (a) Montrer que la tangente $(\Delta_0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M(0 ; 2) admet une équation de la forme :

   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   (b) Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente $(\Delta_0)$.

**Partie C :**

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a$, $a$ réel quelconque.
   Montrer que la tangente $(\Delta_a)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente $(\Delta_{-2})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse $-2$.

Compléments sur la dérivation — Sujets de bac

## D'après Centres Etrangers 9 juin 2021 Sujet 1

**Partie A :**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\text{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $g'$ sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel $x$ :

   $$g'(x) = \frac{-2}{3}\text{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout $x$ réel.

**Partie B :**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = 2\text{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   (a) Montrer que la tangente $(\Delta_0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M(0 ; 2) admet une équation de la forme :

   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   (b) Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente $(\Delta_0)$.

**Partie C :**

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a$, $a$ réel quelconque.
   Montrer que la tangente $(\Delta_a)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente $(\Delta_{-2})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse $-2$.