# Compléments sur la dérivation — Exercices

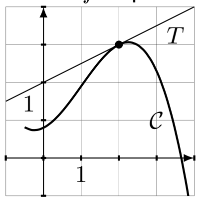
Terminale

## Rappels sur la dérivation

**Exercice 1**
Soit $a$ un réel.

1. Déterminer le taux d'accroissement de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ entre $a$ et $a + h$ ($h \neq 0$).
2. En déduire que $f$ est dérivable en $a$ et déterminer $f'(a)$.

**Exercice 2**
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction $f$ dérivable ainsi que la tangente $T$ à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a = 2$.




1. Déterminer graphiquement $f'(2)$.
2. En déduire une équation de la tangente $T$.

**Exercice 3**
Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de $f$.

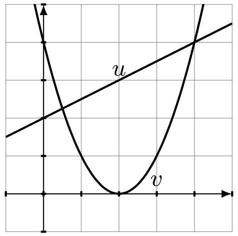
1. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$
2. $f(x) = 2x + 3 + 5\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$
4. $f(x) = (3 - 2x^2)\mathrm{e}^x$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{3x + 4}$
6. $f(x) = (2x + 1)\cos(x)$

**Exercice 4**
Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$ au point d'abscisse $-2$.

**Exercice 5**
Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

## Fonctions composées

**Exercice 6**
On donne ci-dessous la représentation graphique de deux fonctions $u$ et $v$.




Déterminer $v \circ u(2)$ et $v \circ u(0)$.

**Exercice 7**
Dans chaque cas, exprimer $v \circ u(x)$ en fonction de $x$.

1. $u(x) = -3x + 4$ et $v(x) = x^3$
2. $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$
3. $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \cos(x) + 2x$
4. $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x\mathrm{e}^x$

**Exercice 8**
Dans chaque cas, donner deux fonctions $u$ et $v$ telles que $f = v \circ u$.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x-5}$
3. $f(x) = |x^2 - 1|$
4. $f(x) = \dfrac{2}{(x^3 - 1)^2}$

**Exercice 9**
Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \cos(x^3 + 1)$
2. $f(x) = \sqrt{7x^2 + 3x + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x + 3)^4}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-0,5x+25}$

**Exercice 10**
Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de $f$ :

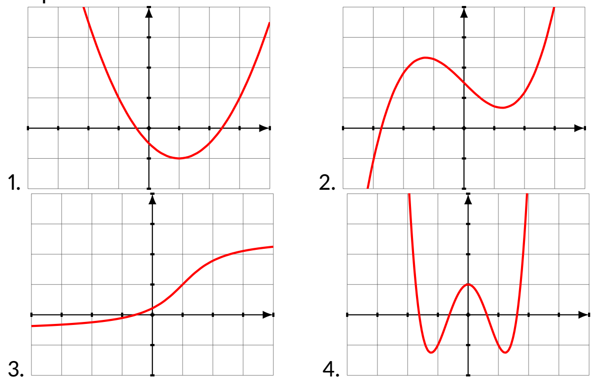
1. $f(x) = -2\mathrm{e}^{10x}$
2. $f(x) = (x^2 + 5)^3$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{3x^3 - 2x + 1}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x + 6}\right)^3$

**Exercice 11**
Calculer la fonction dérivée de $f$ dans chaque cas.

1. $f(x) = (x - 1)\mathrm{e}^{-3x}$
2. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 3}$
3. $f(x) = x \times (1 - x)^3$
4. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$

## Convexité et dérivée première

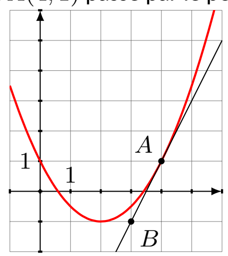
**Exercice 12**
On donne ci-dessous le graphe de quatre fonctions définies sur $[-4; 4]$. Pour chacune des fonctions, indiquer les intervalles sur lesquels elle est concave et ceux où elle est convexe.




**Exercice 13**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe au point d'abscisse $a = 10$.
   (b) Que peut-on dire de la position relative de la tangente $T$ par rapport à la courbe de $f$ ? Justifier.
   (c) En déduire, sans faire aucun calcul, que $10,1^2 > 102$.

**Exercice 14**
Voici dans un repère la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par $f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1$. La tangente $T$ à la courbe de $f$ au point $A(4; 1)$ passe par le point $B(3; -1)$.




1. Déterminer graphiquement la convexité de $f$ sur l'intervalle $[-1; 6]$.
2. Déterminer une équation de la tangente $T$.
3. En déduire que pour tout réel $x \in [-1; 6]$, $(x - 2)^2 \geqslant 4x - 12$.

**Exercice 15**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2400x + 8000$.

1. Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = -24(x-10)^2$.
2. Donner le tableau de variations de $f'$.
3. En déduire les intervalles sur lesquels $f$ est convexe et concave.

**Exercice 16**
On considère une fonction $g$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $g'$, fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. La fonction $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
2. La fonction $g$ est concave sur l'intervalle $[0; 13]$.

## Convexité et dérivée seconde

**Exercice 17**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les intervalles où $f$ est convexe et les intervalles où elle est concave.

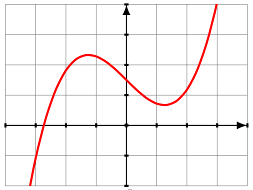
1. $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$
2. $f(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{2x}$
3. $f(x) = -x^3 + 4x - 5$

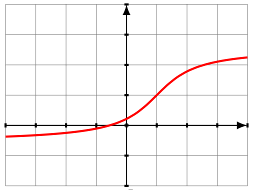
**Exercice 18**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4$.

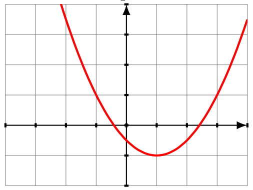
1. Étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente en $0$ à la courbe de $f$.
3. Montrer que pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3$.

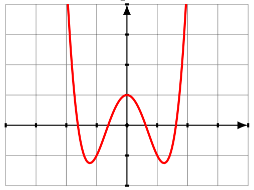
## Points d'inflexion

**Exercice 19**
Dans chaque cas, déterminer graphiquement les points d'inflexion à la courbe s'ils existent.


1.


2.

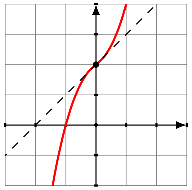

3.


4.

**Exercice 20**
On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer $f''(x)$ pour tout réel $x$.
2. Étudier la convexité de $f$ et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

**Exercice 21**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-3; 1]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a représenté la tangente à la courbe au point d'abscisse $0$.



1. Construire les tableaux de signes de $f$, $f'$ et $f''$.
2. En déduire le tableau de variations et la convexité de $f$ sur $[-3; 1]$.

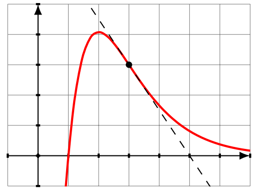
**Exercice 22**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x - 2x^2$.

1. Justifier que pour tout $x \in [-2; 2]$, $f''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x - 4$.
2. On admet que la courbe de $f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $i$. On considère l'algorithme suivant :

```
X ← -2
Tant que f''(X) ⩽ 0
| X ← X + 0,01
Fin Tant que
Afficher X - 0,01 et X
```

   Quelles valeurs seront affichées à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
3. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. Traduire cet algorithme en langage Python puis l'exécuter.

**Exercice 23**
La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1; 7]$. La droite $T$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(3; 3)$ et passe par le point de coordonnées $(5; 0)$. Le point $A$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte. Choisir la bonne réponse en justifiant.

1. Le nombre $f'(3)$ vaut
   (a) $3$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{-2}{3}$ (d) $\frac{-3}{2}$
2. On a
   (a) $f''(3) = 3$ (b) $f''(3) = 0$ (c) $f''(5) = 0$
   (d) $f''(2) = 0$
3. La fonction dérivée $f'$ est croissante sur
   (a) $[1; 2]$ (b) $[1; 7]$ (c) $[2; 7]$ (d) $[3; 7]$

## Problème

**Exercice 24**
Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5kg de légumes variés labélisés « bio ». La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction $C$ définie sur $[0; 10]$ par
$C(x) = \dfrac{-1}{48}x^4 + \dfrac{5}{16}x^3 + 5x + 10$.
Lorsque $x$ est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On admet que, pour tout nombre $x \in [0; 10]$, le coût marginal (c'est-à-dire l'accroissement du coût de production pour la production d'une unité supplémentaire) est donné par la fonction $C_m = C'$ où $C'$ est la fonction dérivée de $C$.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour 600 paniers vendus.
2. On note $C''$ la fonction dérivée seconde de $C$
   (a) Déterminer l'expression de $C''(x)$ en fonction de $x$.
   (b) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0; a]$ inclus dans $[0; 10]$ sur lequel la fonction $C$ est convexe.
   (c) Que peut-on dire du point d'abscisse $a$ de la courbe représentative de $C$ ? Interpréter cette valeur en termes de coût.