Compléments sur la dérivation

I Rappels sur la dérivation

1. Taux d'accroissement, nombre dérivé et tangente à la courbe d'une fonction

Définition I.1

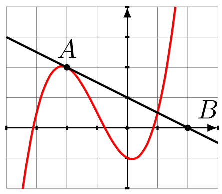
- Le **taux d'accroissement** d'une fonction f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Si ce taux d'accroissement admet une limite ℓ quand h tend vers 0, on dit que la fonction f est dérivable en a. Cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

Exemple I.1 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Déterminer $f'(3)$ à partir de la définition du nombre dérivé.
$\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.2

Si une fonction f est dérivable en un point a, le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point a.

Exemple I.2 — On donne ci-contre la courbe d'une fonction g et on a représenté sur le schéma la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -2. Cette droite passe par les points $A(-2,2)$ et $B(2,0)$. Déterminer le nombre dérivé de g au point d'abscisse -2.
$\longrightarrow$ À rédiger



Proposition I.3

Soit f une fonction dérivable en un point a. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple I.3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
$\longrightarrow$ À rédiger

2. Fonction dérivée, dérivées usuelles et opérations sur les dérivées

Définition I.4

La fonction dérivée d'une fonction f est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Fonction	Dérivable sur ...	Fonction dérivée
$f(x)=k$ $(k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

Fonction	Dérivable sur ...	Fonction dérivée
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin(x)$

Proposition I.5

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

1. $(u+v)'=u'+v'$
2. $(uv)'=u'v+uv'$
3. $(ku)'=ku'$ $(k\in\mathbb{R})$
4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

II Approfondissements sur la dérivation

1. Dérivée d'une fonction composée

Définition II.1

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Soit v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
La fonction qui à $x \in I$ associe $v(u(x))$ s'appelle la **fonction composée** de u par v et se note $v \circ u$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & u(x) \arrow[r, "v"'] & v(u(x)) \end{tikzcd}$$

Exemple II.1 — Dans chaque cas, déterminer l'image de a par la fonction composée $v \circ u$.

1. $u(x) = 3x - 5$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $a = 7$
2. $u(x) = x^2 - 36$, $v(x) = \mathrm{e}^x$ et $a = 6$

→ À rédiger

Exemple II.2 — Pour chacune des fonctions suivantes, préciser les fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^7}{x^7 + 1}$
3. $f(x) = \left(-2x^2 + 4x - 2\right)^3$

→ À rédiger

Proposition II.2

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. Soit v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

Remarque — Dans le cas où u est une fonction affine ($u(x) = ax + b$), on retrouve le résultat vu en Première qui dit que la dérivée de la fonction $x \mapsto v(ax + b)$ est la fonction $x \mapsto a \times v'(ax + b)$.

Exemple II.3 — Dans chaque cas, déterminer la fonction dérivée de f :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
2. $f(x) = \sin(x^2)$
3. $f(x) = \sqrt{3x - 4}$
4. $f(x) = (2x^2 + x + 1)^3$

→ À rédiger

Proposition II.3

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

1. $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
2. $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u'$ pour tout entier naturel n non nul.
3. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ si u est strictement positive sur I.

Exemple II.4 — Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble où elle est dérivable :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$
2. $f(x) = (3x - 2)^4$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

→ À rédiger

2. Dérivée seconde d'une fonction

Définition II.4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I alors on appelle **dérivée seconde** de f la dérivée de la fonction f' et on la note f''.

Exemple II.5 — Déterminer la dérivée seconde de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -5x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 7$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-5x}$
3. $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$

→ À rédiger

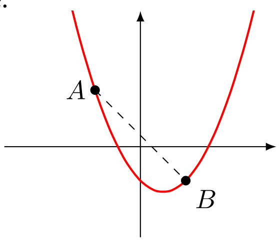
III Convexité d'une fonction

1. Fonction convexe, fonction concave

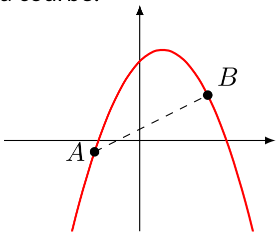
Définition III.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On dit que f est **convexe** si pour tous points A et B de la courbe, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe.

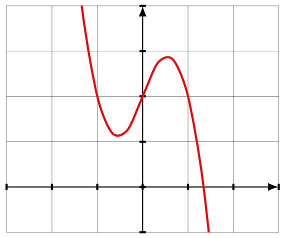


On dit que f est **concave** sur I si pour tous points A et B de la courbe, le segment $[AB]$ est situé en dessous de la courbe.



Remarque — Le segment $[AB]$ s'appelle une **sécante** de la courbe de f. Ainsi, une fonction est convexe sur un intervalle si, et seulement si, toutes les sécantes de sa courbe sur cet intervalle sont au-dessus de la courbe.

Exemple III.1 — On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2; 2]$. Sur quel intervalle f est convexe ? Sur quel intervalle f est concave ? $\rightarrow$ À rédiger



2. Caractérisation de la convexité avec la dérivée première

Proposition III.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

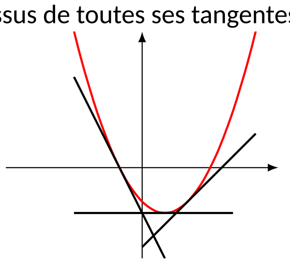
- f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I.

Exemple III.2 — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$ est convexe sur $\mathbb{R}$. $\rightarrow$ À rédiger

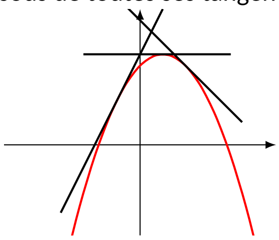
Proposition III.3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f est convexe sur I si, et seulement si, la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I.



f est concave sur I si, et seulement si, la courbe de f est en dessous de toutes ses tangentes sur I.



Exemple III.3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$. $\rightarrow$ À rédiger

3. Caractérisation de la convexité avec la dérivée seconde

Proposition III.4

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geqslant 0$ sur I
- f est concave sur I si, et seulement si, $f''(x) \leqslant 0$ sur I

Démonstration. (du fait que si f'' est positive sur I alors la courbe de f est au-dessus de ses tangentes sur I) $\longrightarrow$ À rédiger

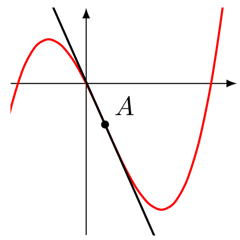
Exemple III.4 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer la fonction dérivée seconde de f.
2. Étudier le signe de $f''(x)$ en fonction de x.
3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. $\longrightarrow$ À rédiger

4. Points d'inflexion

Définition III.5

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On dit qu'un point A de la courbe de f est un **point d'inflexion** si la tangente à la courbe au point A traverse la courbe.



Remarque — Un point d'inflexion correspond à un endroit où la courbe passe de convexe à concave, ou inversement.

Proposition III.6

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et soit a un réel.
Le point A de la courbe de la courbe d'abscisse a est un point d'inflexion si, et seulement si, $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.

Exemple III.5 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f. $\longrightarrow$ À rédiger

5. Applications de la convexité

Esquisser la courbe d'une fonction

Exemple III.6 — 1. On donne les tableaux de variations d'une fonction f et de sa fonction dérivée f'. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

x	-1		0		4		6
f	0	↗	6	↘	-4	↗	6

x	-1		2		6
f'	4	↘	$-2{,}5$	↗	6

2. On donne les tableaux de variations d'une fonction f et de sa dérivée seconde f''. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

x	-1		0		2		3
f	2	↘	-2	↗	2	↘	-2

x	-1		1		3
f''	12	↘	0	↘	-12

$\longrightarrow$ À rédiger

Démontrer des inégalités avec la convexité

Exemple III.7 —

1. Montrer que la fonction racine carrée est concave sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \leqslant \sqrt{a+b}$. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1
Soit $h \in \mathbb{R}^*$.
$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$
Comme $\lim\limits_{h\to 0} 6+h = 6$ alors f est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Exemple I.2
$g'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2 donc
$g'(-2) = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \dfrac{0-2}{2-(-2)} = \dfrac{-2}{4} = -0,5$

Exemple I.3
Une équation de la tangente en 3 est $y=f'(3)(x-3)+f(3)$.
On a vu que $f'(3)=6$ et, de plus, $f(3)=3^2=9$. Ainsi,
$y=f'(3)(x-3)+f(3) \iff y=6(x-3)+9 \iff y=6x-18+9 \iff y=6x-9$

Exemple II.1
1. $u(7)=3\times 7-5=16$ et $v(16)=\sqrt{16}=4$ donc $v\circ u(7)=4$.
2. $u(6)=6^2-36=0$ et $v(0)=\mathrm{e}^0=1$ donc $v\circ u(6)=1$.

Exemple II.2
1. $u(x)=3x+1$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$
2. $u(x)=x^7$ et $v(x)=\dfrac{x}{x+1}$
3. $u(x)=-2x^2+4x-2$ et $v(x)=x^3$

Exemple II.3
1. $f(x)=v(u(x))$ avec $u(x)=-x$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$. Ainsi, $u'(x)=-1$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$. Par suite,
   $f'(x)=u'\times v'(u(x))=-1\times\mathrm{e}^{-x}$
2. $f(x)=v(u(x))$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\sin(x)$. Ainsi, $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\cos(x)$. Par suite,
   $f'(x)=u'\times v'(u(x))=2x\times\cos(x^2)$
3. $f(x)=v(u(x))$ avec $u(x)=3x-4$ et $v(x)=\sqrt{x}$. Ainsi, $u'(x)=3$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par suite,
   $f'(x)=u'\times v'(u(x))=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{3x-4}}$
4. $f'(x)=v(u(x))$ avec $u(x)=2x^2+x+1$ et $v(x)=x^3$. Ainsi, $u'(x)=4x+1$ et $v'(x)=3x^2$. Par suite,
   $f'(x)=u'\times v'(u(x))=(4x+1)\times 3\left(2x^2+x+1\right)^2$

Exemple II.4
1. $f'(x)=(-4x)\mathrm{e}^{-2x^2}$
2. $f'(x)=4\left(3x-2\right)^3\times 3=12\left(3x-2\right)^3$
3. $f'(x)=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$. Ceci est valable en tout point $x^2-5x>0$. En faisant un tableau de signe, on voit que c'est valable sur $]-\infty,0[\cup]0;+\infty[$

Exemple II.5
1. $f'(x)=-20x^3+3x+2$
   $f''(x)=-60x^2+3$
2. $f'(x)=-5\times\mathrm{e}^{-5x}$
   $f''(x)=-5\times(-5)\times\mathrm{e}^{-5x}=25\mathrm{e}^{-x}$
3. $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{2x}+x\times 2\times\mathrm{e}^{2x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x}$
   $f''(x)=2\times\mathrm{e}^{2x}+(2x+1)\times 2\times\mathrm{e}^{2x}=(2+(2x+1)\times 2)\mathrm{e}^{2x}=(4x+4)\mathrm{e}^{2x}$

Exemple III.1
f est convexe sur $[-2;0]$ et concave sur $[0;2]$.

Exemple III.2
Pour tout réel x, $f'(x)=6x-2$. La fonction f' est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement positif donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple III.3
1. Pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. $f(0)=\mathrm{e}^0=1$ et $f'(0)=\mathrm{e}^0=1$. Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est
   $y=f'(0)(x-0)+f(0) \iff y=1\times(x-0)+1 \iff y=x+1$
3. Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa représentation graphique est toujours situé au-dessus de ses tangentes. En particulier, cela veut dire que $f(x)\geqslant x+1$ pour tout réel x, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$.

Proposition III.4
On suppose que f'' est positive sur I. Soit $a\in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Montrons que la courbe de f est toujours au-dessus de cette tangente, autrement dit, montrons que pour tout $x\in I$, $f(x)\geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.
Posons pour tout $x\in I$, $g(x)=f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))$. On a $g(a)=f(a)-f'(a)(a-a)+f(a)=0$
De plus, $\forall x\in I, g'(x)=f'(x)-f(a)$. Comme f'' est positive sur I alors f' est croissante sur I. Par suite :

- Si $x\leqslant a$ alors $f'(x)\leqslant f'(a)$ donc $f'(x)-f(a)\leqslant 0 \iff g'(x)\leqslant 0$.
- Si $x\geqslant a$ alors $f'(x)\geqslant f'(a)$ donc $f'(x)-f(a)\geqslant 0 \iff g'(x)\geqslant 0$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

Par suite, la fonction g est positive sur I c'est-à-dire $\forall x\in I, f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))\geqslant 0$ ce qui donne $f(x)\geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple III.4
1. Pour tout réel x,
   $f'(x)=1\times\mathrm{e}^x+x\times\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x$
   $f''(x)=1\times\mathrm{e}^x+(x+1)\times\mathrm{e}^x=(x+2)\mathrm{e}^x$
2. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^x			$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

3. On en déduit que f est concave sur $]-\infty;-2]$ et convexe sur $[-2;+\infty[$.

Exemple III.5

1. Pour tout réel x,

$f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$f''(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81$. Ce trinôme possède donc deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{81}}{2\times 3} = -2$

et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{81}}{2\times 3} = 1$

On a donc le tableau de signes suivant :

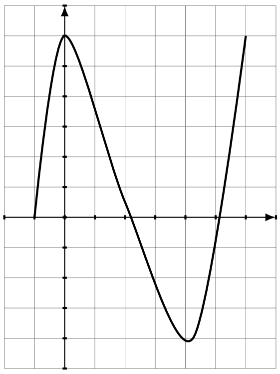
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que f est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[1; +\infty[$ et que f est concave sur $[-2; 1]$.

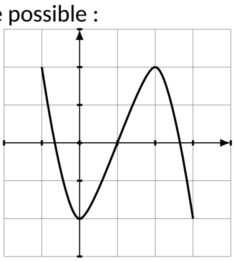
2. Il y a deux endroits où la dérivée seconde s'annule en changeant de signes : en $x = -2$ et en $x = 1$. Ce sont donc les abscisses des points d'inflexion de la courbe.

Exemple III.6

1. Voici une courbe possible :



2. Voici une courbe possible :



Exemple III.7

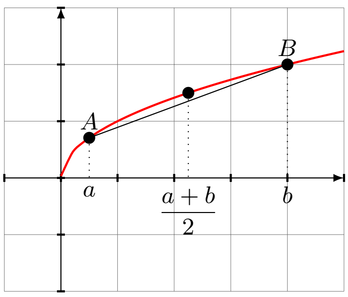
1. Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi,

$f''(x) = \frac{-2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$ (formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$)

On constate que f'' est négative sur $]0; +\infty[$ donc la fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.

2. Puisque f est concave, la courbe de f est située au-dessus de la sécante $[AB]$ avec $A(a, \sqrt{a})$ et $B(b, \sqrt{b})$. Ainsi l'ordonnée du milieu de ce segment est inférieur à l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.



Autrement dit :

$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Ainsi, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}}$

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqslant \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leqslant \sqrt{a+b}$

Compléments sur la dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer la dérivée d'une fonction composée
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule mélangeant opérations algébriques et composition
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f' ou de f''
- Esquisser l'allure de la courbe d'une fonction à partir du tableau de variations de f et f' ou f et f''
- Connaître le lien entre convexité de f, variations de f' et signe de f''
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction
- Savoir déterminer les points d'inflexion graphiquement ou par le calcul

Compléments sur la dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer la dérivée d'une fonction composée
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule mélangeant opérations algébriques et composition
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f' ou de f''
- Esquisser l'allure de la courbe d'une fonction à partir du tableau de variations de f et f' ou f et f''
- Connaître le lien entre convexité de f, variations de f' et signe de f''
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction
- Savoir déterminer les points d'inflexion graphiquement ou par le calcul

Compléments sur la dérivation

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer la dérivée d'une fonction composée
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule mélangeant opérations algébriques et composition
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f
- Savoir déterminer graphiquement la convexité d'une fonction à partir de la courbe de f' ou de f''
- Esquisser l'allure de la courbe d'une fonction à partir du tableau de variations de f et f' ou f et f''
- Connaître le lien entre convexité de f, variations de f' et signe de f''
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction
- Savoir déterminer les points d'inflexion graphiquement ou par le calcul