Raisonnement par récurrence

Exercice 1
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 2
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 3
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 3v_n - 8$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P(n)$: « $v_n = 4$ ».
   (a) Montrer que cette proposition est héréditaire.
   (b) Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, $v_n = 4$?

Exercice 4
Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Calculs de sommes

Exercice 5
Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 3 + 6 + 9 + \cdots + 81$
2. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{15}(2k + 1)$
3. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k - 2)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6
Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 1 + 4 + 16 + \cdots + 262144$
2. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{15} 3^k$
3. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Limite infinie d'une suite

Exercice 7
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 7$.

1. Déterminer un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[1000; +\infty[$.
2. Montrer à partir de la définition que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n^2 - 7 = +\infty$.

Exercice 8
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{5n + 2}$.

1. Déterminer un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[20; +\infty[$.
2. On donne l'algorithme suivant :

```
U ← √2
N ← 0
Tant que U < 20
  N ← N + 1
  U ← √(5N + 2)
Fin Tant que
```

   (a) Quelle valeur contiendra la variable N à la fin de l'algorithme ?
   (b) Traduire cet algorithme en Python.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 9
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

1. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable N contienne après son exécution le plus petit entier n_0 tel que u_{n_0} est supérieur ou égal à un nombre A.

```
U ← ...
N ← ...
Tant que ...
  U ← ...
  N ← ...
Fin Tant que
```

2. Traduire cet algorithme en langage Python. Quelle valeur contient la variable N lorsque A = 200 ?

Exercice 10
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5n^2$.

1. Déterminer un rang à partir duquel tous les u_n sont inférieurs ou égaux à -720.
2. Écrire en langage Python une fonction nommée `seuil` ayant pour argument un nombre A et qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant A$.
3. Soit A un réel négatif. Déterminer un rang à partir duquel tous les u_n sont dans l'intervalle $]-\infty; A]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème de comparaison

Exercice 12
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n^2 - n)\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n + 1 + \cos(n)$.

Exercice 14
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant n - 2$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Limite finie d'une suite

Exercice 15

1. Déterminer un rang à partir duquel tous les $\dfrac{1}{n^2}$ sont dans l'intervalle $]-0,03; 0,03[$.
2. Montrer à partir de la définition que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Exercice 16
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il affiche un entier n pour lequel $v_n \in]4,9; 5,1[$:

```
u = ...
n = ...
while ....... :
    n = ...
    u = ...
print(...)
```

2. Pour tous réels a et b tels que $a < 5 < b$, déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $a < v_n < b$.
3. Que peut-on en déduire ?

Théorème des gendarmes

Exercice 17
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{-1}{n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 18
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} 42 - \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

Opérations sur les limites

Exercice 19
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = n^2 + 5n + \dfrac{3}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}$
3. $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^4} - 5\right)$
4. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2\mathrm{e}^n + n}$
5. $u_n = \dfrac{n^2 - 3}{\mathrm{e}^{-n}}$.

Exercice 20
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = -4n^3 + 2n + 3$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + 2n - 5}{n+3}$
3. $u_n = \dfrac{3\sqrt{n} - 2}{-5n + 4}$
4. $u_n = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 3}$

Exercice 21
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{3\mathrm{e}^n + 8\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{3n}}$$

1. En factorisant par e^{2n} au numérateur et au dénominateur, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3\mathrm{e}^{-n} + 8}{\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^n}$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n).

Étudier un phénomène d'évolution avec une suite

Exercice 22
On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve naturelle. En 2019, il y a 100 tigres. Chaque année, 10% de la population des tigres meurt et il y a 5 tigres qui sont ajoutés à la réserve. On note u_n le nombre de tigres à l'année 2019+n.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.
2. Donner u_0 et justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.
3. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (b) Interpréter ce résultat.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 50$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) En quelle année le nombre de tigres sera inférieur à 70 individus ?
   (d) Écrire en langage Python un algorithme qui affiche l'année à partir de laquelle il y aura strictement moins de 60 tigres.