Suites (1ère partie)

I Raisonnement par récurrence

1. Principe du raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une forme de raisonnement qui sert à prouver qu'une infinité de propriétés dépendant d'un entier naturel n sont vraies.

Théorème I.1

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :

- (Initialisation) $P(0)$ est vraie.
- (Hérédité) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on suppose que $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exemple I.1 — Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = (n-1)^2$. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.2 — Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n \geq n+1$. $\longrightarrow$ À rédiger

Remarque — Parfois, l'initialisation ne peut être faite que pour une valeur n_0 autre que $n = 0$. Dans ce cas, la propriété sera vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

2. Application : somme des termes de suites arithmétiques et géométriques

Proposition I.2

Pour tout entier naturel n non nul,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Remarque — La somme $1 + 2 + \cdots + n$ de tous les entiers allant de 1 à n se note aussi $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$.

Exemple I.3 — Calculer la somme des 20 premiers multiples de 4 non nuls. $\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.3

Soit $q \in \mathbb{R}$. Si $q \neq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.4 — Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

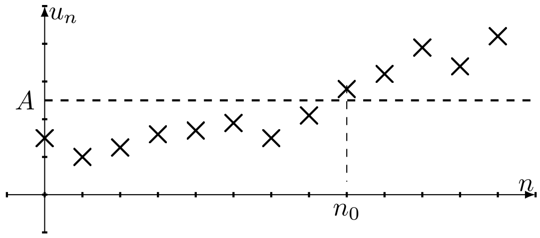
1. Rappeler l'expression de u_n en fonction de n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times \left(2^{n+1} - 1\right)$. $\longrightarrow$ À rédiger

II Limite infinie d'une suite

1. Suite tendant vers $+\infty$

Définition II.1

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



Exemple II.1 — Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-4=+\infty$. → À rédiger

Proposition II.2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

Démonstration. (uniquement le 2.) → À rédiger

Exemple II.2 — Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=2n^3-7$. On admet qu'elle est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

1. Que va renvoyer l'algorithme ci-contre si l'on exécute l'instruction `seuil(1000)` ?
2. Quel est le rôle de cet algorithme ? → À rédiger

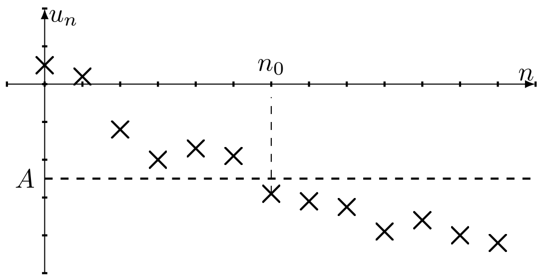
Python

```python
def seuil(A):
    u = - 7
    n = 0
    while u <= A:
        n = n + 1
        u = 2 * n**3 - 7
    return n
```

2. Suite tendant vers $-\infty$

Définition II.3

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.



Exemple II.3 — Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+5=-\infty$. → À rédiger

3. Théorème de comparaison

Théorème II.4

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple II.4 — Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=n^2+\sqrt{n}+2$.

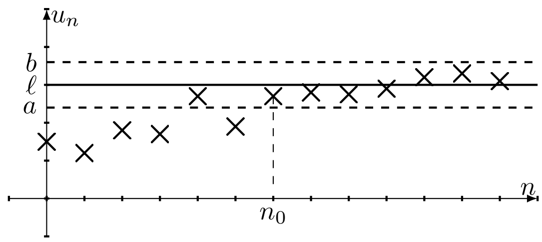
1. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n^2$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n). → À rédiger

III Limite finie d'une suite

1. Suites convergentes

Définition III.1

On dit qu'une suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) **converge** vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



Remarque — Si une suite converge, elle possède une limite réelle. Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**. Une suite qui diverge peut soit avoir $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite, soit ne pas avoir de limite.

Exemple III.1 — Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. → À rédiger

Exemple III.2 — Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas. → À rédiger

Proposition III.2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

2. Théorème des gendarmes

Théorème III.3

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple III.3 — Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. → À rédiger

Exemple III.4 —

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+4)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+4)^2}$. → À rédiger

3. Application : limites de e^n et e^{-n}

Proposition III.4

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$

Démonstration. → À rédiger

IV Opérations sur les limites

1. Tableaux des limites

Somme de limites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Remarque — F.I signifie qu'il s'agit d'une **forme indéterminée**, c'est-à-dire que tous les cas sont possibles.

Exemple IV.1 — Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+n$ → À rédiger

Produit de limites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	∞
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell\times\ell'$	∞	F.I.	∞

Remarque — Quand la limite est infinie, c'est la règle des signes qui permet de déterminer le résultat : $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple IV.2 — Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4(-5+\dfrac{1}{n^2})$ → À rédiger

Quotient de limites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	∞	0	∞
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	0	∞	ℓ'	0	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	F.I	F.I.

Remarque — Quand la limite est infinie, c'est la règle des signes qui permet de déterminer le résultat : $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple IV.3 — Déterminer les limites suivantes : 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^3+1}$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\frac{-2}{n}-1}$ → À rédiger

2. Calculs de limites dans le cas de formes indéterminées

Il y a 4 types de formes indéterminées : $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$. Lorsqu'on tombe sur une forme indéterminée, il se peut que tous les cas de figure soient possibles pour la limite.

Exemple IV.4 —

1. Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$.
2. Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$. → À rédiger

Pour lever une forme indéterminée, il faut modifier l'expression de la suite. Par exemple, si on a une somme alors on essaye de factoriser et si on a un produit, on essaye de développer.

Proposition IV.1

Pour lever une forme indéterminée dans le cas d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle, il faut factoriser par la plus grande puissance de n.

Exemple IV.5 — Déterminer la limite des deux suites suivantes :

1. $u_n = n^4-2n^2+n$
2. $v_n = \dfrac{-2n^2+3n-2}{3n^4-2n+5}$ → À rédiger

Solutions

Exemple I.1
Initialisation. Si $n = 0$ alors, d'une part, $u_0 = 1$ et, d'autre part, $(0-1)^2 = (-1)^2 = 1$ donc $u_0 = (0-1)^2$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = (n-1)^2$. Montrons que $u_{n+1} = ((n+1)-1)^2$ c'est-à-dire $u_{n+1} = n^2$.
$u_{n+1} = u_n + 2n - 1$
$u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1$
$u_{n+1} = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1$
$u_{n+1} = n^2$.
L'hérédité est donc vérifiée. Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n-1)^2$.

Exemple I.2
Initialisation. Si $n = 0$ alors, d'une part, $2^0 = 1$ et, d'autre part, $0 + 1 = 1$ donc $2^0 \geqslant 0 + 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $2^n \geqslant n+1$. Montrons que $2^{n+1} \geqslant n+2$.
$2^n \geqslant n+1$
$2 \times 2^n \geqslant 2 \times (n+1)$
$2^{n+1} \geqslant 2n+2$
Or, $2n \geqslant n$ donc
$2^{n+1} \geqslant 2n+2 \geqslant n+2$
L'hérédité est donc vérifiée. Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geqslant n+1$.

Proposition I.2
Initialisation. Si $n = 1$ alors, d'une part, $1 = 1$ et, d'autre part, $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Montrons que $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'hérédité est donc vérifiée. Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple I.3
$4 \times 1 + 4 \times 2 + \cdots + 4 \times 20 = 4 \times (1 + 2 + \cdots + 20) = 4 \times \dfrac{20 \times 21}{2} = 840$

Proposition I.3
Initialisation. Si $n = 0$ alors, d'une part, $1 = 1$ et, d'autre part, $\dfrac{q^1-1}{q-1} = 1$ donc $1 = \dfrac{q^1-1}{q-1}$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Montrons que $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} = \dfrac{q^{n+2}-1}{q-1}$.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q-1}$$
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1}$$
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$$

L'hérédité est donc vérifiée. Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exemple I.4
1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$
2. $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + \cdots + 3 \times 2^n = 3(2^0+2^1+\cdots+2^n) = 3 \times \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 3 \times (2^{n+1}-1)$

Exemple II.1
Soit $A\mathbb{R}$.
$3n-4 \in [A;\infty[\iff A \leqslant 3n-1 \iff A-1 \leqslant 3n \iff \dfrac{A-1}{3} \leqslant n$.
Ainsi, à partir du rang $E\left(\dfrac{A-1}{3}\right) + 1$ (partie entière de $\dfrac{A-1}{3}$ plus un), tous les termes de la suite sont dans $[A;\infty[$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-4 = +\infty$.

Proposition II.2
Soit $A\mathbb{R}^+$.
$n^2 \in [A;\infty[\iff A \leqslant n^2 \iff \sqrt{A} \leqslant noun \leqslant -\sqrt{A} \iff \sqrt{A} \leqslant n$ (car n est positif).
Ainsi, à partir du rang $E\left(\sqrt{A}\right) + 1$, tous les termes de la suite sont dans $[A;\infty[$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Exemple II.2
1. L'algorithme va renvoyer la valeur 8.
2. Comme la suite est croissante et tend vers $+\infty$, cet algorithme sert à donner le plus petit rang à partir duquel tous les u_n dépassent A.

Exemple II.3
Soit $A \in \mathbb{R}$.
$-2n+5 \in [A;\infty[\iff -2n+5 \leqslant A \iff 5-A \leqslant 2n \iff \dfrac{5-A}{2} \leqslant n$.
Ainsi, à partir du rang $E\left(\dfrac{5-A}{2}\right) + 1$, tous les termes de la suite sont dans $[A;\infty[$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n+5 = +\infty$.

Théorème II.4
Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$
- Il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1, A \leqslant u_n$

Ainsi, pour tout $n \geqslant max(n_0, n_1)$, $A \leqslant u_n \leqslant v_n$ c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, $A \geqslant v_n$. Cela veut bien dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exemple II.4
1. Pour tout entier naturel n, $\sqrt{n}+2 \geqslant 0$ donc $n^2+\sqrt{n}+2 \geqslant n^2+0$ c'est-à-dire $v_n \geqslant n^2$.
2. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant n^2$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exemple III.1
Soit $]a;b[$ un intervalle contenant 0.
$u_n \in]a;b[\iff a < \dfrac{1}{n} < b \iff 0 < \dfrac{1}{n} < b$ (car $\dfrac{1}{n}$ est toujours positif) d'où :
$u_n \in]a;b[\iff n > \dfrac{1}{b}$
Ainsi, à partir du rang $E\left(\dfrac{1}{b}\right) + 1$, tous les termes de la suite sont dans $]a;b[]$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Exemple III.2
Pour tout entier naturel n, $(-1)^n$ vaut soit 1, soit -1. En particulier, si un intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, il est d'amplitude (longueur) au moins 2 (car il contiendrait 1 et -1).
Par l'absurde : si la suite convergeait vers un réel ℓ, l'intervalle $]\ell - 0,5; \ell + 0,5[$ contiendrait tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cela n'est pas possible car cet intervalle est d'amplitude 1.
Comme on aboutit à une contradiction, cela veut dire que la suite $(-1)^n$ n'est pas convergente.

Exemple III.3
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Exemple III.4
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part, comme 1 et $(n+4)^2$ sont positifs, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+4)^2}$.
   D'autre part, comme $n+4 \geqslant n$ alors $(n+4)^2 \geqslant n^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$) donc $\dfrac{1}{(n+4)^2} \geqslant \dfrac{1}{n^2}$ (la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$).
2. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+4)^2} = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+4)^2} = 0$.

Proposition III.4
1. Commençons par montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{e}^n \geqslant n$.
   Initialisation. Si $n = 1$, $e^1 = \mathrm{e} \approx 2,7$ et $n = 1$ donc on a bien $\mathrm{e}^1 \geqslant 1$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{e}^n \geqslant n$. Montrons que $\mathrm{e}^{n+1} \geqslant n+1$.
   $\mathrm{e}^n \geqslant n$
   $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^n \geqslant \mathrm{e} \times n$
   $\mathrm{e}^{n+1} \geqslant \mathrm{e} \times n$.
   Or, $\mathrm{e}n \geqslant n+1 \iff (\mathrm{e}-1)n \geqslant 1 \iff n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.
   Comme $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0,58$ et que n est entier, $n \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}-1} \iff n \geqslant 1$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}n \geqslant n+1$ donc $\mathrm{e}^{n+1} \geqslant \mathrm{e}n \geqslant n+1$.
   L'hérédité est donc vérifiée. Par suite, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{e}^n \geqslant n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
2. Soit n entier naturel n non nul. Tout d'abord, on sait que $\mathrm{e}^{-n} > 0$. De plus, $\mathrm{e}^n \geqslant n$ entraîne que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $0 < \mathrm{e}^{-n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$.

Exemple IV.1
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + n = +\infty$.

Exemple IV.2
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = -\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{1}{n^2} = -5$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4(-5 + \dfrac{1}{n^2}) = -\infty$.

Exemple IV.3
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 1 = +\infty$ donc, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^3+1} = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} - 1 = -1$ donc, par quotient des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\frac{-2}{n} - 1} = -\infty$.

Exemple IV.4
1. Si $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $u_n \times v_n = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$.
2. Si $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ alors $u_n \times v_n = \dfrac{n^2}{n} = n \longrightarrow +\infty$.

Exemple IV.5
1. $u_n = n^4 \left(1 - \dfrac{2n^2}{n^4} + \dfrac{n}{n^4}\right) = n^4 \left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right)$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = 1$ alors, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.
2. $v_n = \dfrac{n^2\left(-2 + \dfrac{3n}{n^2} - \dfrac{2}{n^2}\right)}{n^4\left(3 - \dfrac{2n}{n^4} + \dfrac{5}{n^4}\right)} = \dfrac{n^2}{n^4} \times \dfrac{-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}}{3 - \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{5}{n^4}} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}}{3 - \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{5}{n^4}}$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}}{3 - \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{5}{n^4}} = \dfrac{-2}{3}$.
   Par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Suites (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir raisonner par récurrence pour établir une propriété sur une suite
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- Savoir appliquer le théorème de comparaison
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers un réel ℓ
- Savoir appliquer le théorème des gendarmes
- Savoir calculer la limite d'une suite à partir des tableaux sur la somme, le produit ou le quotient de limites
- Savoir lire et écrire un algorithme de recherche de seuil
- Savoir étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite

Suites (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir raisonner par récurrence pour établir une propriété sur une suite
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- Savoir appliquer le théorème de comparaison
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers un réel ℓ
- Savoir appliquer le théorème des gendarmes
- Savoir calculer la limite d'une suite à partir des tableaux sur la somme, le produit ou le quotient de limites
- Savoir lire et écrire un algorithme de recherche de seuil
- Savoir étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite

Suites (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir raisonner par récurrence pour établir une propriété sur une suite
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
- Savoir appliquer le théorème de comparaison
- Connaître la définition d'une suite qui tend vers un réel ℓ
- Savoir appliquer le théorème des gendarmes
- Savoir calculer la limite d'une suite à partir des tableaux sur la somme, le produit ou le quotient de limites
- Savoir lire et écrire un algorithme de recherche de seuil
- Savoir étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite