Quantificateurs

Exercice 1
Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier naturel n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les nombres rationnels sont des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un nombre rationnel.

Négation

Exercice 2
Écrire la négation des propositions suivantes :

1. Pour tout réel x, on a $x^2 < 0$.
2. Pour tout $a > 0$, il existe un réel q tel que $0 < q$ et $q < a$.
3. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
4. Toutes les voitures rapides sont rouges.
5. Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.

Implications, conditions nécessaires et suffisantes

Exercice 3

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse.
   (a) k est pair $\Rightarrow k+1$ est pair
   (b) k est pair $\Rightarrow k+1$ est impair
   (c) k est impair $\Rightarrow k+1$ est pair
   (d) k est impair $\Rightarrow k+1$ est impair
2. À quelle condition sur A et B l'implication « $A \Rightarrow B$ » est fausse ?

Exercice 4
Répondre par vrai ou faux. Soit P l'énoncé : « Pour qu'une boule soit blanche, il faut qu'elle soit creuse ». Alors P signifie :

1. « Toute boule blanche est creuse »
2. « Toute boule creuse est blanche »
3. « Si une boule est blanche, alors elle est creuse »
4. « Si une boule est creuse, alors elle est blanche »
5. « Pour qu'une boule soit creuse, il suffit qu'elle soit blanche »

Exercice 5
Répondre par vrai ou faux. Soit Q l'énoncé : « Pour qu'une boule soit blanche, il suffit qu'elle soit creuse ». Alors Q signifie :

1. « Toute boule blanche est creuse »
2. « Toute boule creuse est blanche »
3. « Si une boule n'est pas blanche, alors elle n'est pas creuse »
4. « Si une boule n'est pas creuse, alors elle n'est pas blanche »
5. « Pour qu'une boule soit creuse, il suffit qu'elle soit blanche »

Réciproque

Exercice 6

1. La réciproque du théorème suivant : « Si un nombre entier est multiple de 10 alors son chiffre des unités est 0 » est :
   (a) Si un nombre entier n'est pas multiple de 10 alors son chiffre des unités n'est pas 0.
   (b) Si un nombre entier n'est pas terminé par 0 alors il n'est pas multiple de 10.
   (c) Si un nombre entier est terminé par 0 alors il est multiple de 10.
   (d) Si un nombre entier est terminé par 0 alors il n'est pas multiple de 10.
2. La réciproque de « Si un nombre se termine par le chiffre 6 alors c'est un multiple de 2 » est-elle vraie ?

Contraposée

Exercice 7
Écrire la contraposée de chacune des propositions suivantes :

1. Si $a \neq 1$ et $b \neq 1$ alors $a + b + ab \neq 1$.
2. Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un carré.
3. $x > 16 \Rightarrow \sqrt{x} > 4$.

Équivalence

Exercice 8
Pour chaque équivalence, dire si elle est vraie ou fausse.

1. $x^2 = 10 \iff x = \sqrt{10}$
2. $4x - 12 = 0 \iff x = 3$
3. A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

Démontrer ou infirmer une proposition universelle

Exercice 9
Chacune des propositions suivantes utilise un quantificateur universel. Pour chaque proposition, montrer qu'elle est vraie ou fausse. Pour cela :

- Si elle est vraie, on fera un raisonnement général.
- Si elle est fausse, on donnera un contre-exemple.

1. Pour tout réel x, $x^2 > 10$.
2. Pour tout entier naturel n, $(n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 4$.
3. Pour tout réel y, $2y + 3 = 5 \Rightarrow y = 1$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = 4n - 3$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démontrer par l'absurde

Exercice 10
Pour démontrer une proposition par l'absurde, on suppose que son contraire est vrai et on montre qu'on aboutit à une absurdité.
Soit P la proposition « $\sqrt{2} \neq 1,414$ ». Démontrer cette proposition à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.