Introduction à la logique mathématique

I Quantificateurs

Définition I.1

En mathématiques, il y a deux types de quantificateurs :

- le quantificateur universel : « Pour tout ». On le note $\forall$.
- le quantificateur existentiel : « Il existe ». On le note $\exists$.

Exemple I.1 — Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. « Pour tout nombre réel supérieur ou égal à 2, le carré de ce nombre est supérieur ou égal à 4 »
2. « Il existe un nombre entier naturel strictement inférieur à 23 »
3. « Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel y tel que $x = y^2$ » → À rédiger

Exemple I.2 — Parmi les propositions des trois exemples précédents, laquelle est fausse ? Justifier. → À rédiger

II Négation

Définition II.1

- La négation de « Pour tout » est « Il existe » et la négation de « Il existe » est « Pour tout ».
- La négation de « ou » est « et » et la négation de « et » est « ou ».

Exemple II.1 — Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

1. « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ »
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2$ ou $x \leqslant -10$ »
3. « Pour tout entier naturel a, il existe un entier naturel b tel que $a + b$ est divisible par 3 » → À rédiger

III Implication. Conditions nécessaires ou suffisantes

1. Implication

Définition III.1

La proposition « Si A est vraie alors B est vraie » s'appelle une **implication**. On dit aussi « A implique B » et on note « A $\implies$ B ».

Remarque — À chaque fois qu'on utilise un mot tel que « donc », « ainsi », « d'où », il s'agit en fait d'une implication.

Exemple III.1 — Écrire la proposition « Pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair » à l'aide de symboles logiques. → À rédiger

2. Condition nécessaire

Définition III.2

Dans la langue française, la phrase « Pour que A soit vraie, il faut que B soit vraie » signifie « A $\implies$ B ». On appelle cela une **condition nécessaire**.

Exemple III.2 — « Pour que deux nombres soient égaux, il faut que leur carrés soient égaux » est une condition nécessaire qui se traduit mathématiquement par « $x = y \implies x^2 = y^2$ ». On peut reformuler cette proposition en disant que « Si deux nombres sont égaux, alors *nécessairement* leurs carrés sont égaux ».

3. Condition suffisante

Définition III.3

Dans la langue française, la phrase « Pour que A soit vraie, il suffit que B soit vraie » signifie « B $\Longrightarrow$ A ». On appelle cela une **condition suffisante**.

Exemple III.3 — « Pour que la somme de deux nombres entiers soit un nombre pair, il suffit que ces deux nombres soient eux-mêmes pairs » est une condition suffisante qui se traduit mathématiquement par « x et y pairs $\Longrightarrow$ $x+y$ est pair ».

IV Réciproque

Définition IV.1

La réciproque de l'implication « A $\Longrightarrow$ B » est « B $\Longrightarrow$ A ».

Exemple IV.1 — Écrire la réciproque de l'implication « x et y pairs $\Longrightarrow$ $x+y$ est pair ».
Cette réciproque est-elle vraie ? $\rightarrow$ À rédiger

Remarque — Ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa réciproque est elle aussi vraie.

V Contraposée

Définition V.1

La contraposée de l'implication « A $\Longrightarrow$ B » est « non(B) $\Longrightarrow$ non(A) »

Exemple V.1 — Quelle est la contraposée de l'implication « Si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » ? $\rightarrow$ À rédiger

Remarque — Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité, c'est-à-dire que si l'une est vraie alors l'autre aussi et si l'une est fausse, alors l'autre aussi. Ainsi, pour démontrer une implication, on peut donc plutôt démontrer sa contraposée.

VI Équivalence

Définition VI.1

Si « A $\Longrightarrow$ B » est vraie et si « B $\Longrightarrow$ A » est vraie, on dit que A et B sont des propositions **équivalentes** et on note « A $\Longleftrightarrow$ B ».

Remarque — Dans la langue française, on utlise l'expression « si, et seulement si » pour parler d'une équivalence.

Exemple VI.1 — Écrire les deux implications qui sont représentées par la proposition : « Une fonction est croissante sur un intervalle si, et seulement si, sa fonction dérivée est positive sur cet intervalle ». $\rightarrow$ À rédiger

Remarque — Il ne faut pas confondre le symbole d'équivalence $\Longleftrightarrow$ avec le symbole d'égalité $=$. Par exemple, l'expression $f(x) \Longleftrightarrow 3x^2+2x-1$ n'a pas de sens. Pour savoir s'il faut utiliser un symbole d'équivalence, on peut essayer de faire une phrase avec « Si ... alors ... ». Par exemple, comme la phrase « Si $f(x)$ alors $3x^2+2x-1$ » ne veut rien dire, cela indique que l'écriture $f(x) \Longleftrightarrow 3x^2+2x-1$ est incorrecte.

Solutions

Exemple I.1

1. $\forall x \in [2; +\infty[, x^2 \geqslant 4$
2. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 23$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$

Exemple I.2

La proposition 3 est fausse. Pour le prouver, il suffit de donner un contre-exemple : si $x = -5$ alors il n'existe pas de nombre réel y tel que $-3 = y^2$ car un carré est toujours positif.

Exemple II.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x \leqslant 2$ et $x > 10$
3. $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, a + b$ n'est pas divisible par 3

Exemple III.1

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair
ou encore
$\forall n \in \mathbb{N}, (\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 2k \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}, n = 2k')$

Exemple IV.1

$x + y$ est pair $\Rightarrow x$ et y pairs.
Cette réciproque est fausse car si $x = 3$ et $y = 5$ alors $x+y = 8$ est pair et pourtant x n'est pas pair (ni y d'ailleurs).

Exemple V.1

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

Exemple VI.1

- Si une fonction est croissante sur intervalle alors sa dérivée est positive sur cet intervalle.
- Si la dérivée d'une fonction est positive sur un intervalle alors cette fonction est croissante sur cet intervalle.

Introduction à la logique mathématique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Reconnaître ce qu'est une proposition mathématique et à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques
- Lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle
- Lire et écrire des propositions contenant les connecteurs «et» et «ou»
- Formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs
- Distinguer condition nécessaire et condition suffisante
- Formuler une implication ou une équivalence logique
- Utiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse
- Formuler la réciproque d'une implication ou de sa contraposée

Introduction à la logique mathématique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Reconnaître ce qu'est une proposition mathématique et à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques
- Lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle
- Lire et écrire des propositions contenant les connecteurs «et» et «ou»
- Formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs
- Distinguer condition nécessaire et condition suffisante
- Formuler une implication ou une équivalence logique
- Utiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse
- Formuler la réciproque d'une implication ou de sa contraposée

Introduction à la logique mathématique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Reconnaître ce qu'est une proposition mathématique et à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques
- Lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle
- Lire et écrire des propositions contenant les connecteurs «et» et «ou»
- Formuler la négation de propositions simples, pouvant contenir un ou deux quantificateurs
- Distinguer condition nécessaire et condition suffisante
- Formuler une implication ou une équivalence logique
- Utiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse
- Formuler la réciproque d'une implication ou de sa contraposée