Terminale Spécialité

Nom :
Nom du voisin :

Interrogation de mathématiques n°9

Exercice 1 : (2,5 points)

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $3e^{x} = 5$

b) $5e^{3x} - 2 \geq 2e^{3x}$

c) $2\ln(x) = -10$

2. Dresser le tableau de signes de $3 - 10\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Nom :
Nom du voisin :

Exercice 2 : (1 point)

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 0,8^n$.

Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 4,9$.

Exercice 3 : (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - 1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{x}$.

Interrogation de mathématiques n°9 - CORRIGE

Exercice 1 : (2,5 points)

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $3\mathrm{e}^x = 5$

$$3\mathrm{e}^x = 5 \Leftrightarrow e^x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

b) $5\mathrm{e}^{3x} - 2 \geq 2\mathrm{e}^{3x}$

$$5\mathrm{e}^{3x} - 2 \geq 2\mathrm{e}^{3x} \Leftrightarrow 3e^{3x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3e^{3x} \geq 2 \Leftrightarrow e^{3x} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow 3x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{3}$$

c) $2\ln(x) = -10$

$$2\ln(x) = -10 \Leftrightarrow \ln(x) = -5 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-5} \Leftrightarrow x = e^{-5}$$

2. Dresser le tableau de signes de $3 - 10\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$

$$3 - 10\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq 10\ln(x) \Leftrightarrow \frac{3}{10} \geq \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{10}} \geq e^{\ln(x)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{10}} \geq x$$

Ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	0	$e^{3/10}$	$+\infty$
$3 - 10\ln(x)$	$+$	|	$-$

Exercice 2 : (1 point)

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5-0,8^n$.

Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 4,9$.

$$\begin{aligned} u_n > 4,9 &\Leftrightarrow 5-0,8^n > 4,9 \\ &\Leftrightarrow 0,1 > 0,8^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,1) > \ln(0,8^n) \\ &\Leftrightarrow \ln(0,1) > n\ln(0,8) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} < n \quad \text{car } \ln(0,8) \text{ est strictement négatif} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)} \approx 10,32$, on en déduit que le plus petit entier n cherché est $n = 11$.

Exercice 3 : (1,5 point)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x)-1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par produit et somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc, par produit et somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 2\times\frac{1}{x} - 0 = \frac{2}{x}$