Nom :
Nom du voisin :

Interrogation de mathématiques n°7

Exercice 1 : (1 point)

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$d:\begin{cases} x=3-2t \\ y=2+t \quad (t\in R) \\ z=-1-3t \end{cases}$$

Donner, sans justifier, un point A de cette droite ainsi qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

Exercice 2 : (1,5 point)

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; – 2 ; 3) et B (3 ; 2 ; – 1).

Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 3 : (2,5 points)

On considère la droite (d) dont une équation paramétrique est : $(d)\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathrm{IR})$

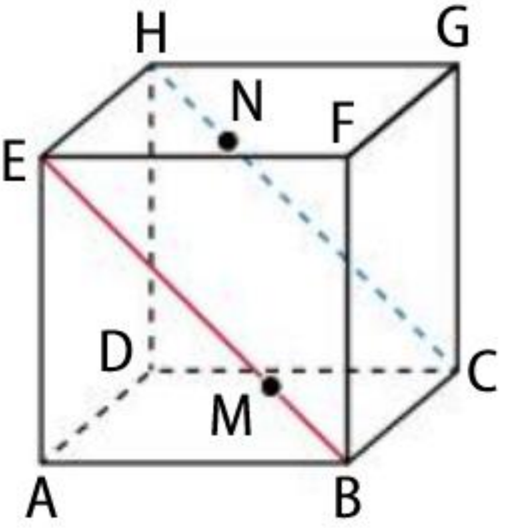
1) Montrer que le point A (6 ; 0,5 ; 3,5) appartient à la droite (d) :

2) On considère aussi la droite $(d')\begin{cases} x = 11 - 3t' \\ y = 3 - t' \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathrm{IR})$.

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 4 : (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH. Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$.



On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de tous les points du cube dans ce repère.

2. A l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ et que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

3. On admet que les coordonnées de M et N sont $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{4}\right)$ et $N\left(\frac{1}{4};1;\frac{3}{4}\right)$. Montrer que les droites (MF) et (DN) sont parallèles.

Nom :
Nom du voisin :

Interrogation de mathématiques n°7 - CORRIGE

Exercice 1 : (1 point)

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \quad (t \in R) \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Donner, sans justifier, un point A de cette droite ainsi qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un point de cette droite est $A(3;2;-1)$.

Exercice 2 : (1,5 point)

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; – 2 ; 3) et B (3 ; 2 ; – 1).

Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-(-2) \\ -1-3 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Comme (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et qu'elle passe par le point A, une équation paramétrique de la droite (AB) est :

$$(AB) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t - 2 \quad (t \in R) \\ z = -4t + 3 \end{cases}$$

Nom :
Nom du voisin :

Exercice 3 : (2,5 points)

On considère la droite (d) dont une équation paramétrique est : $(d)\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 2+t \\ z = -1-3t \end{cases} \quad (t \in \mathrm{IR})$

1) Montrer que le point A (6 ; 0,5 ; 3,5) appartient à la droite (d) :

$$A \in (d) \Leftrightarrow \exists t \in R, \begin{cases} 6 = 3-2t \\ 0,5 = 2+t \\ 3,5 = -1-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -2t \\ -1,5 = t \\ 4,5 = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{-2} = -1,5 \\ t = -1,5 \\ t = \dfrac{4,5}{-3} = -1,5 \end{cases}$$

Comme ce système possède une solution, alors le point A appartient bien à (d).

2) On considère aussi la droite $(d')\begin{cases} x = 11-3t' \\ y = 3-t' \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathrm{IR})$.

Montrer que les droites (d) et (d') sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.

Soit $M(x, y, z)$ un point.

$$M \in (d) \cap (d') \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2t = 11-3t' \\ 2+t = 3-t' \\ -1-3t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+3t' = 8 & (L1) \\ t+t' = 1 & (L2) \\ -3t-t' = 1 & (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+3t' = 8 \\ t+t' = 1 \\ -2t = 2\,(L3 \leftarrow L2+L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\times(-1)+3t' = 8 \\ -1+t' = 1 \\ t = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{6}{3} = 2 \\ t' = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

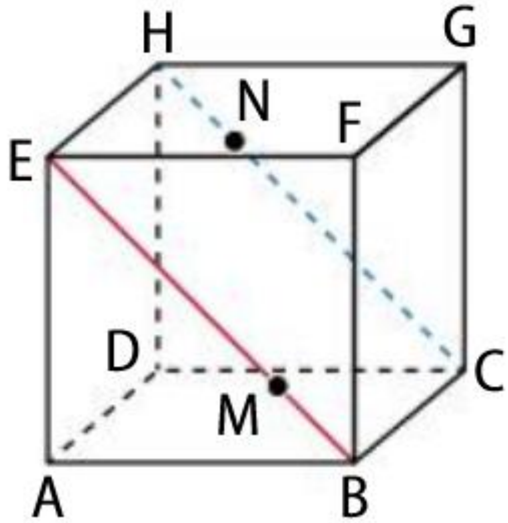
Donc ce système possède bien une solution, ce qui signifie que les droites sont sécantes. Pour trouver leur point d'intersection, il suffit par exemple de remplacer t par – 1 dans l'équation de la droite (d). On trouve que le point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = 3-2\times(-1) = 5 \\ y = 2+(-1) = 1 \\ z = -1-3\times(-1) = 2 \end{cases}$$

Ainsi, le point d'intersection est $M(5;1;2)$

Exercice 4 : (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH. Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$.



On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de tous les points du cube dans ce repère.

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$

$E(0;0;1)$ $F(1;0;1)$ $G(1;1;1)$ $H(0;1;1)$

2. A l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ et que $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\\
&=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\\
&=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\
&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{3}{4}\overrightarrow{CH}\\
&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}\\
&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

3. On admet que les coordonnées de M et N sont $M\left(\frac{3}{4};0;\frac{1}{4}\right)$ et $N\left(\frac{1}{4};1;\frac{3}{4}\right)$. Montrer que les droites (MF) et (DN) sont parallèles.

$$\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}x_F-x_M\\ y_F-y_M\\ z_F-z_M\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{4}\\ 0-0\\ 1-\frac{1}{4}\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}x_N-x_D\\ y_N-y_D\\ z_N-z_D\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-0\\ 1-1\\ \frac{3}{4}-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

On remarque alors que $\overrightarrow{MF}=1\times\overrightarrow{DN}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires

Donc les droites droites (MF) et (DN) sont parallèles.