Interrogation de mathématiques n°2

SUJET A

Exercice 1 : (2 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2} + 10$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{-1}{n^2} + 10 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} + 10$$

2) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Nom :
Nom du voisin :

Exercice 2 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

1) Calculer u_1.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

Terminale Spécialité

Nom :
Nom du voisin :

Interrogation de mathématiques n°2

SUJET B

Exercice 1 : (2 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3} + 2$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{-1}{n^3} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} + 2$$

2) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Nom :
Nom du voisin :

Exercice 2 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1$.

1) Calculer u_1.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

Interrogation de mathématiques n°2

SUJET A

Exercice 1 : (2 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2} + 10$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{-1}{n^2} + 10 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} + 10$$

Soit n un entier naturel non nul.

On a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Donc $\dfrac{-1}{n^2} \leq \dfrac{\cos(n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Donc $\dfrac{-1}{n^2} + 10 \leq \dfrac{\cos(n)}{n^2} + 10 \leq \dfrac{1}{n^2} + 10$

D'où $\dfrac{-1}{n^2} + 10 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2} + 10$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n) .

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1}{n^2} + 10 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2} + 10$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n^2} + 10 = 10$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} + 10 = 10$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10$.

Exercice 2 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

1) Calculer u_1.

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\times 0 + 1$$
$$= \frac{1}{2}\times 1 + 0 + 1$$
$$= \frac{3}{2}$$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

Initialisation : si $n = 0$:

Puisque $1 \geq 0$ alors $u_0 \geq 0$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $u_n \geq n$.

Montrons que $u_{n+1} \geq n+1$.

On a supposé que $u_n \geq n$

Donc $\frac{1}{2}u_n \geq \frac{1}{2}n$

Donc $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \geq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n$

Donc $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n \geq n$

Donc $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 \geq n + 1$ d'où $u_{n+1} \geq n+1$. L'hérédité est donc vérifiée.

Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq u_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Interrogation de mathématiques n°2 - CORRIGE

SUJET B

Exercice 1 : (2 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + 2$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{-1}{n^3} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} + 2$$

Soit n un entier naturel non nul.

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $\frac{-1}{n^3} \leq \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$

Donc $\frac{-1}{n^3} + 2 \leq \frac{(-1)^n}{n^3} + 2 \leq \frac{1}{n^3} + 2$

D'où $\frac{-1}{n^3} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} + 2$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n) .

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{-1}{n^3} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^3} + 2$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^3} + 2 = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} + 2 = 2$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Terminale Spécialité Nom :
Nom du voisin :

Exercice 2 : (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1$.

1) Calculer u_1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4} \times 0 + 1 \\ &= \frac{1}{4} \times 4 + 0 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq n$.

Initialisation : si $n = 0$:

Puisque $4 \geq 0$ alors $u_0 \geq 0$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $u_n \geq n$.

Montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$.

On a supposé que $u_n \geq n$

Donc $\frac{1}{4}u_n \geq \frac{1}{4}n$

Donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n \geq \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n$

Donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n \geq n$

Donc $\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}n + 1 \geq n + 1$ d'où $u_{n+1} \geq n + 1$. L'hérédité est donc vérifiée.

Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leq u_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.