Terminale Spécialité

Nom :
Nom du voisin :

Interrogation de mathématiques n°10

Exercice 1 : (2,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;0;3)$, $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Terminale Spécialité

Nom :
Nom du voisin :

Exercice 2 : (2,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(6;1;6)$ et le plan P dont une équation cartésienne est : $5x+2y+4z-11=0$.

Soit d la droite orthogonale au plan P passant par le point A.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de la droite d avec le plan P.

3. En déduire la distance du point A au plan P.

Interrogation de mathématiques n°10 - CORRIGE

Exercice 1 : (2,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;0;3)$, $B(2;2;7)$ et $C(-1;5;4)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$

Comme $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{5}$, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi, A, B et C définissent un plan.

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = 1 \times 2 + 1 \times 2 + (-1) \times 4 = 2 + 2 - 4 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC), une équation cartésienne du plan (ABC) est

$$2x + y - z + d = 0$$

Or, $A \in (ABC)$ donc $2 \times 1 + 0 - 3 + d = 0$ donc $-1 + d = 0$ d'où $d = 1$.

Ainsi, une équation cartésienne de (ABC) est

$$2x + y - z + 1 = 0$$

Exercice 2 : (2,5 points)

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(6;1;6)$ et le plan P dont une équation cartésienne est : $5x+2y+4z-11=0$.

Soit d la droite orthogonale au plan P passant par le point A.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P donc c'est un vecteur directeur de la droite d. Ainsi, une représentation paramétrique de la droite d est :

$$\begin{cases} x=5t+6 \\ y=2t+1 \\ z=4t+6 \end{cases}$$

2. Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de la droite d avec le plan P.

$$H \in P \cap d \iff \begin{cases} x=5t+6 \\ y=2t+1 \\ z=4t+6 \\ 5x+2y+4z-11=0 \end{cases}$$

$$H \in P \cap d \iff 5(5t+6)+2(2t+1)+4(4t+6)-11=0$$

$$H \in P \cap d \iff 25t+30+4t+2+16t+24-11=0$$

$$H \in P \cap d \iff 45t+45=0$$

$$H \in P \cap d \iff t=\frac{-45}{45}=-1$$

On en déduit que les coordonnées de H sont :

$$\begin{cases} x=5\times(-1)+6=1 \\ y=2\times(-1)+1=-1 \\ z=4\times(-1)+6=2 \end{cases}$$

Donc $H(1;-1;2)$.

3. En déduire la distance du point A au plan P.

La distance du point A au plan P est la distance du point A à son projeté orthogonal qui se trouve être le point H. Ainsi, la distance du point A au plan P est :

$$AH=\sqrt{(1-6)^2+(-1-1)^2+(2-6)^2}$$

$$AH=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(-4)^2}$$

$$AH=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}$$