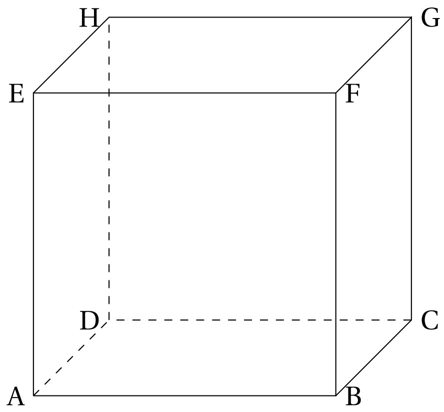
DM n°3

On considère un cube $ABCDEFGH$ et les points suivants : I est le milieu de $[GH]$, J est tel que $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HD}$ et K est le milieu de $[FB]$.



Partie A

1. Sur la figure, placer les points I, J et K.
2. (a) Justifier que les droites (IJ) et (GC) sont sécantes en un point L.

   (b) Construire le point L sur la figure.
3. Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (BCG).

Partie B

Dans cette partie, l'espace est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On pourra utiliser sans justification les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

   (b) On considère le point P de coordonnées $\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{4}{7}\right)$. Montrer que $P \in (AG)$.
3. On souhaite démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires. On cherche deux nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{IP} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$.

   (a) Montrer que cela revient à résoudre le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} \frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ \frac{-3}{7} = -\beta \\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

   (b) Résoudre ce système et conclure.

   (c) Que peut-on en déduire sur les points I, J, K et P ?
4. Le plan (ABG) est un plan diagonal du cube. Déterminer la droite d'intersection des plans (ABG) et (IJK).