DM n°3 — Corrigé

Partie A

1. Voir figure.

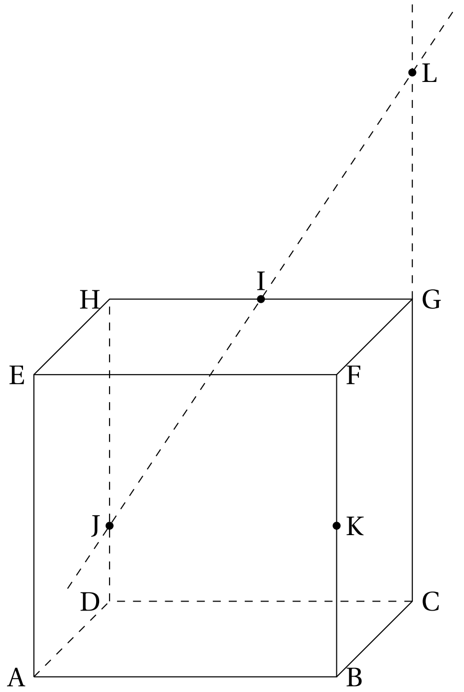
2. **(a)** Tout d'abord, les droites (IJ) et (GC) sont coplanaires car les points I, J, G et C appartiennent tous au plan (HGC). De plus, ces droites ne sont ni confondues, ni parallèles donc elles sont sécantes en un point L.

(b) Voir figure.

3. Le point L appartient à (IJ) donc il est dans le plan (IJK). De plus, il appartient à la droite (GC) donc il est dans le plan (BCG). Par suite, il appartient à l'intersection des plans (IJK) et (BCG).

Le point K appartient au plan (IJK) et il appartient au plan (BCG) car il est sur la droite (FB) qui est incluse dans le plan (BCG). Le point K appartient donc à l'intersection des plans (IJK) et (BCG).

On en déduit que l'intersection des plans (IJK) et (BCG) est la droite (KL).



Partie B

1. I est le milieu de $[GH]$ donc $I\left(\frac{x_G+x_H}{2};\frac{y_G+y_H}{2};\frac{z_G+z_H}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ d'où $I\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

On en déduit que $J\left(0;1;\frac{1}{4}\right)$.

Enfin, puisque K est le milieu de $[FB]$, on a : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. On en déduit que $K\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.

2. **(a)** $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur directeur de la droite (AG) et que celle-ci passe par le point A, on en déduit qu'une représentation paramétrique de (AG) est

$$(AG)\begin{cases}x=1t+0\\y=1t+0\\z=1t+0\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \iff \begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

(b) $P\in(AG)\iff \exists t\in\mathbb{R}\begin{cases}\frac{4}{7}=t\\\frac{4}{7}=t\\\frac{4}{7}=t\end{cases}$

Puisque ce système d'équations possède une unique solution, on en déduit que le point P appartient à la droite (AG).

3. **(a)** On a les coordonnées suivantes :

$\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\\\frac{4}{7}-1\\\frac{4}{7}-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\\frac{-3}{7}\\\frac{-3}{7}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\1-1\\\frac{1}{4}-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\0\\\frac{-3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\0-1\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{IP} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}\frac{1}{14} = \alpha\times\frac{-1}{2} + \beta\times\frac{1}{2}\\ \frac{-3}{7} = \alpha\times 0 + \beta\times(-1)\\ \frac{-3}{7} = \alpha\times\frac{-3}{4} + \beta\frac{-1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\\ \frac{-3}{7} = -\beta\\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha + \frac{-1}{2}\beta\end{cases}$$

(b) On résout le système d'équations :

$$\begin{cases}\frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\\ \frac{-3}{7} = -\beta\\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha + \frac{-1}{2}\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\\ \beta = \frac{3}{7}\\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha + \frac{-1}{2}\beta\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\\ \beta = \frac{3}{7}\\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha + \frac{-1}{2}\times\frac{3}{7}\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{14} = \frac{-1}{2}\alpha + \frac{3}{14}\\ \beta = \frac{3}{7}\\ \frac{-3}{7} = \frac{-3}{4}\alpha + \frac{-3}{14}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\frac{-2}{14} = \frac{-1}{2}\alpha\\ \beta = \frac{3}{7}\\ \frac{-3}{14} = \frac{-3}{4}\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = \frac{\frac{-2}{14}}{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{14}\times\frac{2}{-1} = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}\\ \beta = \frac{3}{7}\\ \alpha = \frac{\frac{-3}{14}}{\frac{-3}{4}} = \frac{-3}{14}\times\frac{4}{-3} = \frac{14}{4} = \frac{2}{7}\end{cases}$$

Comme le système possède une unique solution, on en déduit que $\overrightarrow{IP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{IJ} + \frac{3}{7}\overrightarrow{IK}$. Puisque $\overrightarrow{IP}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

(c) Puisque les vecteurs $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires alors les points I, J, K et L sont coplanaires.

4. Puisque les points I, J, K et L sont coplanaires alors le point P appartient au plan (IJK). De plus, P appartient au plan (ABG) puisqu'il appartient à la droite (AG). On en déduit que P appartient à l'intersection des plans (IJK) et (ABG).

D'autre part, le point I appartient à la fois au plan (IJK) et au plan (ABG) (car il appartient à la droite (HG) qui est incluse dans le plan (BCG)). Par suite, I appartient à l'intersection des plans (IJK) et (ABG).

On en déduit alors que l'intersection des plans (IJK) et (ABG) est la droite (IP).