DM n°2 — Corrigé

1. **Réponse B.** On teste si chacun des points appartient à la droite Δ. On trouve alors que seul le point N appartient à cette droite car

$$P \in \Delta \iff \begin{cases} -3 = 1 + 2t \\ -4 = -2 + t \\ 6 = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{-4}{2} = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

2. **Réponse C.**
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. **Réponse B.**
1ère méthode. On commence par chercher les droites qui possèdent un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- droite de la réponse A : vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car
$$\vec{u} = k\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 2 = 1 \times k \\ 1 = 1 \times k \\ 0 = -2 \times k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \\ k = 0 \end{cases}$$
et ce système n'a pas de solution.

- droite de la réponse B : vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car
$$\vec{u} = k\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} -1 = 1 \times k \\ -1 = 1 \times k \\ 2 = -2 \times k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$
donc $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$

- droite de la réponse C : vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car
$$\vec{u} = k\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 1 = 1 \times k \\ 1 = 1 \times k \\ 2 = -2 \times k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$
et ce système n'a pas de solution.

- droite de la réponse D : vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car
$$\vec{u} = k\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} 1 = 1 \times k \\ 1 = 1 \times k \\ -2 = -2 \times k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$
donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Ainsi, la bonne réponse est soit la réponse B, soit la réponse C. On voit de plus que le point B n'appartient à la droite de la réponse D car

$$\begin{cases} 2 = 1 + t \\ 1 = 1 + t \\ 0 = 2 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

D'autre part, on voit que B appartient à la droite de la réponse B car, si $t = 0$, on retrouve les coordonnées de B.

2ème méthode. La droite cherchée est celle à laquelle appartiennent à la fois le point A et le point B. Il s'agit de la droite d donnée dans la réponse B car

$$A \in d \iff \begin{cases} 1 = 2 - t \\ 0 = 1 - t \\ 2 = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{et } B \in d \iff \begin{cases} 2 = 2 - t \\ 1 = 1 - t \\ 0 = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

4. Réponse A.

1ère méthode. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= -\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= 2\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2ème méthode. Puisque $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ alors

$$\begin{pmatrix} x_D - 0 \\ y_D - 0 \\ z_D - 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -2 \\ z_D = 4 \end{cases}$. Ainsi, les coordonnées de D sont $(1; -2; 4)$.

Par suite, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cherchons à savoir si ces trois vecteurs sont coplanaires c'est-à-dire s'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} &\iff \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = a - b \\ -2 = a + b \\ 2 = -2a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = -1 - b \\ -2 = -1 + b \\ a = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -1 \\ b = -1 \\ a = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

On déduit alors que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.