

Contrôle n°8

Durée: 1 h

EXERCICE 1 — 5 points

On dispose de deux dés tétraédriques (à 4 faces). L'un est vert et ses faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2. L'autre est bleu et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 3. Lors d'un jeu, on est amené à lancer ces dés. On gagne autant de points que le nombre inscrit sur la face qui sort.

1. (a) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points lorsqu'on lance le dé vert. Déterminer la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau puis calculer son espérance et sa variance.
 - (b) On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points lorsqu'on lance le dé bleu. Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer son espérance et sa variance.
2. Au cours de la partie, un joueur doit lancer successivement le dé vert puis le dé bleu. Le joueur gagne la somme totale des nombres inscrits sur les faces de ces dés. On note Z la variable aléatoire qui, à un lancer successif de ces deux dés, associe le nombre de points obtenus par le joueur. Ainsi, $Z = X + Y$.
 - (a) En utilisant uniquement les questions précédentes, déterminer l'espérance de Z .
 - (b) Peut-on affirmer que $V(Z) = V(X) + V(Y)$? Justifier la réponse.
 - (c) À l'aide d'un arbre de probabilités, déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire Z .
 - (d) Déterminer la loi de probabilité de Z .

EXERCICE 2 — 3 points

La majorité des contraventions liées aux infractions au code de la route concernent les contraventions de 4e classe : utilisation du téléphone au volant, feu rouge grillé, non respect du port de la ceinture, chevauchement d'une ligne blanche continue, etc. Le tarif forfaitaire d'une telle contravention s'élève à 135 €. Il est cependant possible de payer la contravention moins chère si on procède rapidement au paiement. Elle s'élève alors à 90 € et on parle d'amende minorée. À l'inverse, en cas de retard de paiement, le prix de l'amende augmente et passe alors à 375 €. On parle alors d'amende majorée.

A partir des dossiers des contrevenants qu'elle possède, une préfecture a établi les informations suivantes concernant le paiement des contraventions de 4e classe :

Montant de l'amende (en €)	90	135	375
Fréquence observée (en %)	79	15	6

1. On note X la variable aléatoire qui à un dossier d'un contrevenant choisi au hasard associe le montant de l'amende qu'il doit payer. Déterminer l'espérance de X .
2. On choisit au hasard 100 dossiers. On suppose que le nombre de dossiers est suffisamment important pour assimiler cette expérience à un tirage avec remise. Pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, 100\}$, on note X_k la variable aléatoire égale à l'amende payée par la personne du k -ème dossier choisi. On note alors $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$.
 - (a) Que représente la variable aléatoire S ?
 - (b) Calculer $E(S)$.
 - (c) Combien faut-il choisir de dossiers au minimum pour que, en moyenne, le montant total payé par les contrevenants de ces n dossiers soit supérieur à 1000€?

EXERCICE 3 — 4 points

Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente, en secondes, subi par la clientèle d'une entreprise avant d'être prise en communication avec un standardiste. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 secondes est égale à 0,4.

1. Au cours d'une même semaine, un client passe cinq appels, indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire exprimant le nombre de fois où, au cours de ces cinq appels, le temps d'attente est supérieur à 20 secondes.
 - (a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Donner ses paramètres.
 - (b) Calculer la probabilité qu'exactement deux appels sur les cinq passés par le client ait un temps d'attente supérieur à 20 secondes.
 - (c) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .
2. On note T la variable aléatoire qui à tout client associe son temps d'attente. On sait que cette variable aléatoire a pour espérance 18 et pour écart-type 7. Soit M la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de 100 clients choisis au hasard.
Déterminer l'espérance de M ainsi que son écart-type.