Contrôle n°8 — Corrigé

Exercice 1

1. (a) La loi de probabilité de X est la suivante :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$

L'espérance de X est $E(X) = \frac{2}{4} \times 1 + \frac{2}{4} \times 2 = 1,5$

La variance de X est

$V(X) = \frac{2}{4}(1-1,5)^2 + \frac{2}{4}(2-1,5)^2 = 0,25$

(b) La loi de probabilité de Y est la suivante :

y_i	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

L'espérance de Y est $E(Y) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{4} \times 3 = 2,25$

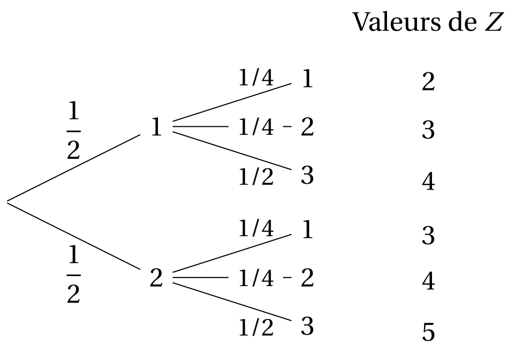
La variance de Y est

$V(Y) = \frac{1}{4}(1-2,25)^2 + \frac{1}{4}(2-2,25)^2 + \frac{2}{4}(3-2,25)^2 = 0,6875$

2. (a) Par linéarité, $E(Z) = E(X) + E(Y)$ donc $E(Z) = 1,5 + 2,25 = 3,75$.

(b) Les expériences aléatoires consistant à lancer le dé vert et le dé bleu sont indépendantes donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. On peut donc affirmer que $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

(c) Voici un arbre représentant la situation :



Les valeurs possibles de la variable aléatoire Z sont donc 2, 3, 4 et 5.

(d) Voici la loi de probabilité de Z :

z_i	2	3	4	5
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

Les probabilités ont été calculées à partir de l'arbre :

$P(Z=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$P(Z=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

$P(Z=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(Z=5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Exercice 2

1. $E(X) = 0,79 \times 90 + 0,15 \times 135 + 0,06 \times 375 = 113,85$

2. (a) S représente le montant total payé par 100 contrevenants choisis au hasard.

(b) Puisque S est la variable aléatoire somme d'un échantillon de la loi de probabilité de X, on a

$E(S) = 100 \times E(X) = 100 \times 113,85 = 11385$

(c) Soit n le nombre de dossiers choisis et soit $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

$E(S) > 1000 \iff nE(X) > 1000 \iff n \times 113,85 > 1000 \iff n > \frac{1000}{113,85}$

Puisque $\frac{1000}{113,85} \approx 8,8$, l'inéquation précédente est équivalente à $n \geqslant 9$. Il faut donc choisir au minimum 9 dossiers pour que le montant total payé par les contrevenants soit supérieur à 1000 euros.

Exercice 3

1. (a) On répète 5 fois de manière identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli qui consiste à considérer un appel du client et à voir si son temps d'attente dépasse 20 secondes (probabilité de succèes : $p = 0,4$).

Comme X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$.

(b) $P(X=2) = \binom{5}{2} \times 0,4^2 \times (1-0,4)^{5-2} = 0,3456$.

(c) $E(X) = np = 5 \times 0,4 = 2$

$V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,4 \times 0,6 = 1,2$

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{1,2} \approx 1,095$

2. $E(M) = E(T) = 18$ et $\sigma(M) = \frac{\sigma(T)}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0,7$