

## Contrôle n°7

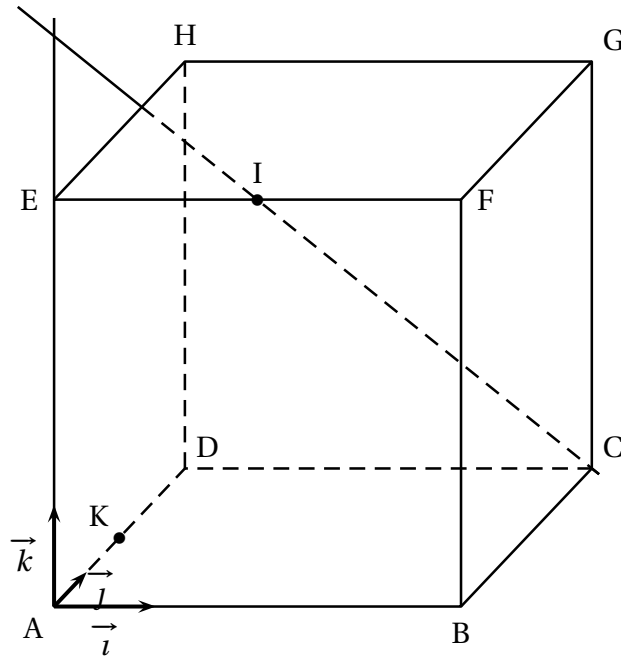
Durée: 2 h

## EXERCICE 1 — 10 points

On considère un repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace dans lequel on place les points

$$B(4; 0; 0), \quad D(0; 4; 0), \quad E(0; 0; 4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec (IC).

(a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

(b) Justifier que J a pour coordonnées  $(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9})$ .

Que représente J par rapport à C?

(c) Vérifier que le point  $K(0; 2; 0)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ .

(d) Justifier que (BK) est l'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule  $V = \frac{B \times h}{3}$ , où  $B$  est l'aire d'une base et  $h$  la longueur de la hauteur relative à cette base.

(a) Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

(b) En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

(c) Justifier que la droite (BG) est incluse dans  $\mathcal{P}$ .

(d) On note  $I'$  un point de l'arête [EF], et  $P'$  le plan orthogonal à la droite  $(I' C)$  passant par G.

Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans  $P'$ ?

## EXERCICE 2 — 10 points

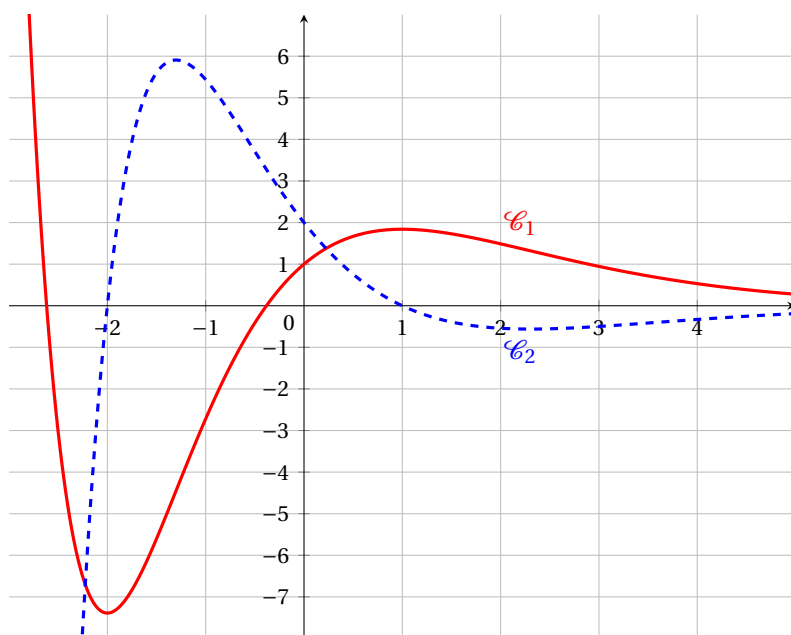
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

### Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera  $g$  et  $g'$ .

On précise également que :

- La courbe  $\mathcal{C}_1$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0 ; 1)$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_2$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0 ; 2)$  et l'axe des abscisses aux points de coordonnées  $(-2 ; 0)$  et  $(1 ; 0)$ .



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions  $g$  et  $g'$  sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 0 est  $y = 2x + 1$ .

### Partie B

On considère  $(E)$  l'équation différentielle

$$y + y' = (2x + 3)e^{-x},$$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ .

1. Montrer que la fonction  $f_0$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y + y' = 0$ .
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. On admet que la fonction  $g$  décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle  $(E)$ .

Déterminer alors l'expression de la fonction  $g$ .

### Partie C

On considère la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à 0.  
On admet par ailleurs que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à  $+\infty$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$ .
  - (b) Déterminer le signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  puis en déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Expliquer pourquoi la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
4. On considère la fonction  $F$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ . Montrer que  $F$  est une primitive de la fonction  $f$ .