Contrôle n°7 — Corrigé

EXERCICE 1

1. $C(4;4;0)$; $F(4;0;4)$; $G(4;4;4)$ et $H(0;4,4)$.

2. Les coordonnées du point I sont $I\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2};\frac{z_E+z_F}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2};\frac{4+4}{2}\right)$ donc $I(2;0;4)$.

   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IC}$ sont $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}x_C-x_I\\y_C-y_I\\z_C-z_I\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\0-4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

   Par suite, une représentation paramétrique de la droite (IC) est (IC) : $\begin{cases}x=2t+2\\y=4t \qquad (t\in\mathbb{R})\\z=-4t+4\end{cases}$

3. (a) Puisque le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (IC), le vecteur $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan. Par suite, une équation cartésienne de ce plan est $\mathscr{P}: 2x+4y-4z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.

   Or, $\mathscr{P}$ passe par le point $G(4;4;4)$ donc $2\times4+4\times4-4\times4+d=0$

   donc $8+16-16+d=0$ d'où $d=-8$.

   Ainsi, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est

   $2x+4y-4z-8=0 \iff 2(x+2y-2z-4)=0 \iff x+2y-2z-4=\frac{0}{2} \iff x+2y-2z-4=0$

   (b) Soit (x,y,z) les coordonnées du point J.

$$J\in\mathscr{P}\cap(IC) \iff \begin{cases}x=2t+2\\y=4t\\z=-4t+4\\x+2y-2z-4=0\end{cases}$$
$$\iff (2t+2)+2(4t)-2(-4t+4)-4=0$$
$$\iff 2t+2+8t+8t-8-4=0$$
$$\iff 18t-10=0$$
$$\iff t=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

   Ainsi, les coordoneés de J sont :

$$\begin{cases}x=2\times\frac{5}{9}+2=\frac{10}{9}+2=\frac{28}{9}\\y=4\times\frac{5}{9}=\frac{20}{9}\\z=-4\times\frac{5}{9}+4=\frac{-20}{9}+4=\frac{36}{9}\end{cases}$$

   Le point J est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathscr{P}$.

   (c) $x_K+2y_K-2z_K-4=0+2\times2-2\times-4=0+4-0-4=0$ donc le point $K(0;2;0)$ appartient bien au plan $\mathscr{P}$.

   (d) Tout d'abord, le point K est le milieu du segment $[AB]$ donc il appartient au plan (ABC). De plus, d'après la question précédente, il appartient au plan $\mathscr{P}$ donc il appartient à l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

   D'autre part, le point B appartient évidemment au plan (ABC). De plus, $x_B+2y_B-2z_B-4=4+2\times0-2\times0-4=0$ donc $B\in\mathscr{P}$. Ainsi, B appartient aussi à l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

   On en déduit alors que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC) est la droite (BK).

4. (a) On choisit comme base de la pyramide le triangle CBK. Dans ce cas, la hauteur associée est $[GC]$.

   L'aire de la base est $B=\dfrac{KK'\times BC}{2}$ où K' est le projeté orthogonal du point K sur (BC). Comme le point K' est situé au milieu de $[BC]$, on a $KK'=4$. De plus, $BC=4$ donc $B=\dfrac{4\times4}{2}=8$.

   D'autre part, $GC=4$ donc le volume de la pyramide $CBKG$ est $V=\dfrac{B\times h}{3}=\dfrac{8\times4}{3}=\dfrac{32}{3}$.

   (b) On prend à présent pour base de la pyramide le triangle BKG. D'après la question 3.(d), les points B et K sont dans le plan $\mathscr{P}$ donc le plan $\mathscr{P}$ est le plan (BKG). Par suite, le projeté orthogonal du point C sur (BKG) est le point J. Or, $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{28}{9}-4\\\frac{20}{9}-4\\\frac{16}{9}-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}\frac{-6}{9}\\\frac{-16}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}$

   Ainsi, $CJ=||\overrightarrow{CJ}||=\sqrt{\left(\frac{-8}{9}\right)^2+\left(\frac{-16}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{256}{81}+\frac{256}{81}}=\sqrt{\frac{576}{81}}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

   Par conséquent,

   $V_{CBKG}=\frac{\mathscr{A}_{BKG}\times CJ}{3}$ donc $\frac{32}{3}=\frac{\mathscr{A}_{BKG}\times\frac{8}{3}}{3}$ donc $32=\mathscr{A}_{BKG}\times\frac{8}{3}$ donc $\mathscr{A}_{BKG}=\frac{32\times3}{8}=12$.

   (c) On a montré dans la question 3.(d) que le point B appartient au plan $\mathscr{P}$. De plus, par définition du plan $\mathscr{P}$, le point G appartient à $\mathscr{P}$. On en déduit alors que la droite (BG) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

(d) Si un point I' est situé sur le segment $[EF]$ alors ses coordonnées sont de la forme $I'(a;0;4)$ où a est un nombre réel. On a donc

$\overrightarrow{I'C}\begin{pmatrix}a-0\\4-0\\0-4\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{I'C}\begin{pmatrix}a\\4\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}4-4\\4-0\\4-0\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

Par suite, $\overrightarrow{I'C}\cdot\overrightarrow{BG} = a\times 0 + 4\times 4 + (-4)\times 4 = 0$.

Cela signifie que le point B appartient au plan passant par G orthogonal à la droite $(I'C)$ c'est-à-dire au plan P'. Puisque G appartient au plan P', on en déduit que la droite (BG) est incluse dans P'.

Exercice 2

Partie A

1. On remarque que lorsque la courbe $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de l'axe des abscisses alors la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une fonction croissante et inversement. Autrement dit, le signe de la fonction associée à la courbe $\mathscr{C}_2$ donne les variations de la fonction associée à la courbe $\mathscr{C}_1$.

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à la fonction dérivée g' et que la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à la fonction g.

2. À partir de la courbe $\mathscr{C}_2$, on lit $g'(0) = 2$ et, à partir de la courbe $\mathscr{C}_1$, on lit $g(0) = 1$.

   Ainsi, une équation de la tangente à la courbe de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)(x-0) + g(0) \iff y = 2(x-0)+1 \iff y = 2x+1$.

Partie B

1. On pose $u = x^2+3x$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$. On a donc $u' = 2x+3$ et $v' = (-1)\mathrm{e}^{-x}$.

   Ainsi, pour tout nombre réel x,

   $f_0'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = ((2x+3)+(x^2+3x)\times(-1))\mathrm{e}^{-x} = (-x^2-x+3)\mathrm{e}^{-x}$

   On en déduit alors que

   $f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2-x+3)\mathrm{e}^{-x} = ((x^2+3x)+(-x^2-x+3))\mathrm{e}^{-x} = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$

   donc la fonction f_0 est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Comme $y + y' = \iff y' = -y$, les solutions de l'équation différentielle $y+y'=0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\times\mathrm{e}^{-x}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

3. Soit f une fonction. Montrons que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-f_0$ est une solution de (E_0).

   $$\begin{aligned}
   f-f_0 \text{ solution de } (E_0) &\iff (f-f_0)+(f-f_0)' = 0\\
   &\iff f - f - 0 + f' - f_0' = 0\\
   &\iff f + f' = f_0 + f_0'\\
   &\iff f + f'(2x+3)\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{car } f_0 \text{ est solution de } (E)\\
   &\iff f \text{ est solution de } (E)
   \end{aligned}$$

   On en déduit alors que f est solution de (E) si, et seulement si, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) - f_0(x) = C\times\mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $f(x) = C\times\mathrm{e}^{-x} + f_0(x)$.

   Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto C\times\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

4. D'après la question précédente, g est de la forme $g(x) = C\times\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x}$. OR, d'après la partie A, $g(0) = 1$ donc $C\times\mathrm{e}^{-0} + (0^2+3\times 0)\mathrm{e}^{-0} = 1$ donc $C+0 = 1$ d'où $C = 1$.

   L'expression de g est donc $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x)\mathrm{e}^{-x} = (x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C

1. Pour tout nombre réel x,

   $f(x) = (x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x} = x^2\mathrm{e}^{-x} + 3x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\times\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}$.

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

   De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$.

   Par somme des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+0+0 = 0$.

2. (a) On pose $u = x^2+3x+2$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$. On a alors $u' = 2x+3$ et $v' = (-1)\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

   $f'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+3x+2)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} = ((2x+3)+(x^2+3x+2)\times(-1))\mathrm{e}^{-x} = (2x+3-x^2-3x-2)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}$

   (b) On étudie le signe du trinôme $-x^2-x+1$. On a $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5$. Ce trinôme possède donc deux racines :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$

   et

   $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$

   On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘		↗		↘	0

3. D'après la question précédente, et puisque $f(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 2)\mathrm{e}^{-0} = 2$, on a donc le tableau de variations suivant sur $[0 ; +\infty[$:

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f	2	↗		↘	0

ce qui montre que f est positive sur $[0 ; +\infty[$.

4. On pose $u = -x^2 - 5x - 7$ et $v = \mathrm{e}^{-x}$. On a alors $u' = -2x - 5$ et $v' = (-1)\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$F'(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2-5x-7) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = ((-2x-5)+(-x^2-5x-7) \times (-1))\mathrm{e}^{-x} = (-2x-5+x^2+5x+7)\mathrm{e}^{-x} = (x^2+3x+2)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$, on en déduit que F est une primitive de f.