

## Contrôle n°6

Durée: 2 h

**EXERCICE 1 — 10 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points  $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$ ,  $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ ,  $L\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$  et  $K$  tel que

$$\overrightarrow{EK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EF}.$$

Une figure à compléter est donnée en annexe.

Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A**

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(IJ)$ .

2. (a) Montrer que  $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ .

Ainsi, les coordonnées du point  $K$  sont  $\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ .

(b) Démontrer que la droite  $(KL)$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{2}t' + \frac{3}{4} \\ y = t' \\ z = -t' + 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. En résolvant un système, démontrer que les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont sécantes. On ne demande pas de donner le point d'intersection.

**Partie B**

1. (a) En utilisant des coordonnées de vecteurs, démontrer que les droites  $(KJ)$  et  $(IL)$  sont parallèles.

(b) En déduire que  $L$  appartient au plan  $(IJK)$ .

2. On désigne par  $M$  le point d'intersection du plan  $(AEF)$  et de la droite  $(IL)$ .

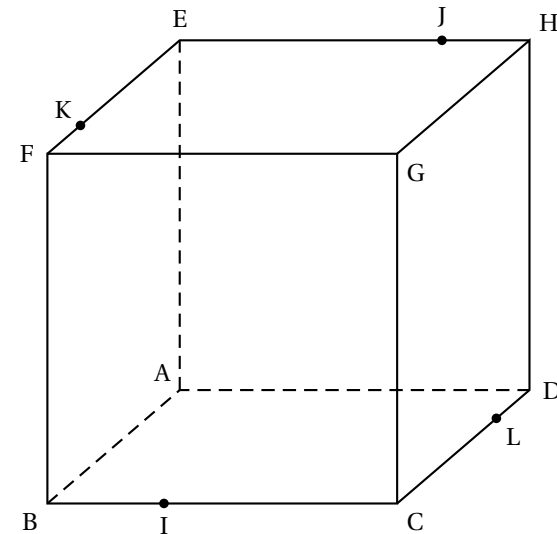
(a) Placer le point  $M$  sur la figure donnée en annexe. Aucune justification n'est demandée.

(b) Les points du plan  $(AEF)$  ont une de leur coordonnée  $(x, y$  ou  $z)$  qui est nulle. Laquelle?

(c) On admet qu'une représentation paramétrique de la droite  $(IL)$  est

$$\begin{cases} x = \frac{-3}{4}t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

En déduire les coordonnées du point  $M$ , intersection de la droite  $(IL)$  avec le plan  $(AEF)$ .



## EXERCICE 2 — 10 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ , c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On pourra remarquer  $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ .
3. Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = (1-x)e^{-x} + 2$ .
4. Montrer que la droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction  $f'$  au voisinage de  $+\infty$ .
5. Montrer que pour tout réel  $x$  :

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

6. Étudier la convexité de la fonction  $f$ .
7. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum ainsi qu'une valeur approchée.  
Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues dans le tableau de variations.
8. En déduire le signe de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ , puis justifier que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
9. (a) Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  
(b) Montrer que  $\alpha \in [0; 1]$ .  
(c) Donner un encadrement de  $\alpha$ , au centième près.
10. On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 1$ .  
Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $\Delta$ .