Contrôle n°6 — Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1. La droite (IJ) passe par $I\left(1\,;\dfrac{1}{3}\,;0\right)$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}\left(0-1\,;\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\,;\,1-0\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{IJ}\left(-1\,;\dfrac{1}{3}\,;\,1\right)$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc :
$$\begin{cases} x &= -t+1 \\ y &= \frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \\ z &= t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. (a) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$).

   (b) La droite (KL) passe par $\left(\dfrac{3}{4}\,;0\,;1\right)$, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{KL}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\,;1-0\,;\,0-1\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{KL}\left(\frac{-1}{2}\,;1\,;\,-1\right)$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc :
$$\begin{cases} x &= \frac{-1}{2}t'+\frac{3}{4} \\ y &= t' \\ z &= -t'+1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
$$M \in (IJ)\cap(KL) \iff \exists t,t' \in \mathbb{R}, \begin{cases} -t+1 &= \frac{-1}{2}t'+\frac{3}{4} \\ \frac{1}{3}t+\frac{1}{3} &= t' \\ t &= -t'+1 \end{cases} \iff \begin{cases} -t+\frac{1}{2}t' &= \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3}t-t' &= \frac{-1}{3} \\ t+t' &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -t+\frac{1}{2}t' &= \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3}t-t' &= \frac{-1}{3} \\ \frac{3}{2}t' &= \frac{3}{4} \end{cases} \quad (L3 \leftarrow L1+L3)$$
$$\iff \begin{cases} -t+\frac{1}{2}t' &= \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3}t-t' &= \frac{-1}{3} \\ t' &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -t+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} &= \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{3}t-\frac{1}{2} &= \frac{-1}{3} \\ t' &= \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} t &= \frac{1}{2} \\ t &= \frac{1}{2} \\ t' &= \frac{1}{2} \end{cases}$$
Comme ce système possède une unique solution, alors les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Partie B

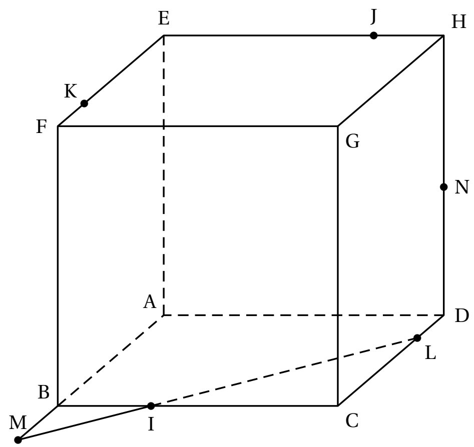
1. (a) On a $\overrightarrow{KJ}\left(\frac{-3}{4}\,;\frac{2}{3}\,;\,0\right)$ et $\overrightarrow{IL}\left(\frac{-3}{4}\,;\frac{2}{3}\,;\,0\right)$. On remarque alors que $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{IL}$ donc ces vecteurs sont colinéaires et donc les droites (KJ) et (IL) sont strictement parallèles ou confondues. Comme elles ne sont clairement pas confondues, elles sont strictement parallèles.

   (b) Les droites (KJ) et (IL) sont coplanaires car elles sont parallèles donc les points K,J,I et L sont dans un même plan. En particulier, le point L appartient au plan (IJK).

2. (a) Voir figure ci-dessous.

   (b) Il s'agit de la coordonnée y qui est nulle ($y=0$).

   (c) Pour trouver les coordonnées de M, on utilise le fait que M est le point d'intersection de la droite (IL) avec le plan (AEF) :
$$M \in (IL)\cap(AEF) \iff \begin{cases} x = \frac{-3}{4}t+1 \\ y = \frac{2}{3}t+\frac{1}{3} \\ z=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-3}{4}t+1 \\ 0 = \frac{2}{3}t+\frac{1}{3} \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$
Or, $0=\frac{2}{3}t+\frac{1}{3} \iff \frac{-1}{3}=\frac{2}{3}t \iff t=\frac{-1}{2}$.
Pour trouver les coordonnées de M, il suffit de remplacer t par $\frac{-1}{2}$ dans l'équation paramétrique de (IL) ce qui donne :
$$\begin{cases} x = \frac{-3}{4}\times\frac{-1}{2}+1 = \frac{11}{8} \\ y = \frac{2}{3}\times\frac{-1}{2}+\frac{1}{3} = 0 \\ z=0 \end{cases}$$
Ainsi, les coordonnées de M sont $\left(\frac{11}{8},0,0\right)$



EXERCICE 2

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty \end{cases}$ donc, par composée des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + 2x - 1$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On pose $u = x$ et $v = e^{-x}$. Ainsi, $u' = 1$ et $v' = (-1)e^{-x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-1)e^{-x} + 2 - 0 = (1 + x\times(-1))\,e^{-x} + 2 = (1-x)\,e^{-x} + 2$

4. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = (1-x)\,e^{-x} + 2 = e^{-x} - xe^{-x} + 2 = e^{-x} - \dfrac{x}{e^x} + 2$.

   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (par croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 + 0 + 2 = 2$.

   Cela signifie que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction f' au voisinage de $+\infty$.

5. On pose $u = 1-x$, $v = e^{-x}$ et $w = 2$. On a alors $u' = -1$, $v' = (-1)e^{-x}$ et $w' = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f''(x) = -1\times e^{-x} + (1-x)\times(-1)e^{-x} + 0 = (-1 + (1-x)\times(-1))\,e^{-x} = (-1-1+x)\,e^{-x} = (x-2)\,e^{-x}$

6. $x - 2 \leqslant 0 \iff x \leqslant 2$ donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}			$+$		
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   On en déduit que f est concave sur $]-\infty;2]$ et f est convexe sur $[2;+\infty[$.

7. D'après la question précédente, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	$-e^{-2}+2$	$\nearrow$	

   $f'(2) = (1-2)e^{-2} + 2 = -e^{-2} + 2 \approx 1{,}86$

8. On constate que le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ est $-e^{-2}+2$. Comme ce minimum est strictement positif, on en déduit que f' est strictement positive sur R ce qui montre que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

9. (a) On sait que :
   - f est continue sur $\mathbb{R}$
   - f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   - 0 appartient à $\left]\lim\limits_{x\to-\infty};\lim\limits_{x\to+\infty}\right[=]-\infty;+\infty[$

   Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur R.

   (b) $f(0) = 0\times e^{-0} + 2\times 0 - 1 = -1$ et $f(1) = 1\times e^{-1} + 2\times 1 - 1 = e^{-1} + 1 \approx 1{,}37$

   Comme $f(0) < 0$ et que $f(1) > 0$, on en déduit que $0 < \alpha < 1$ et donc $\alpha \in [0;1]$.

   (c) Avec une calculatrice, on trouve que $0{,}37 < \alpha < 0{,}38$.

10. Pour étudier la position relative de $\mathbb{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de $f(x) - (2x-1)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (2x-1) = xe^{-x} + 2x - 1 - (2x-1) = xe^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^{-x}			$+$		
$f(x)-(2x-1)$		$-$	0	$+$	

   On en déduit que :
   - sur $]-\infty;0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite Δ
   - sur $[0;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite Δ