BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES

– SPÉCIALITÉ –

Durée de l'épreuve : 4 heures

Mercredi 10 décembre 2025

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 — 5 points

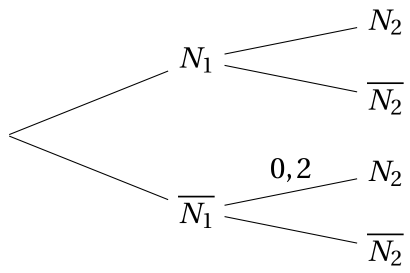
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

Partie A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.
   (a) Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est $0,2$.
   (b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.
   Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - 0,72^n \geqslant 0,9.$$

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

Partie C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

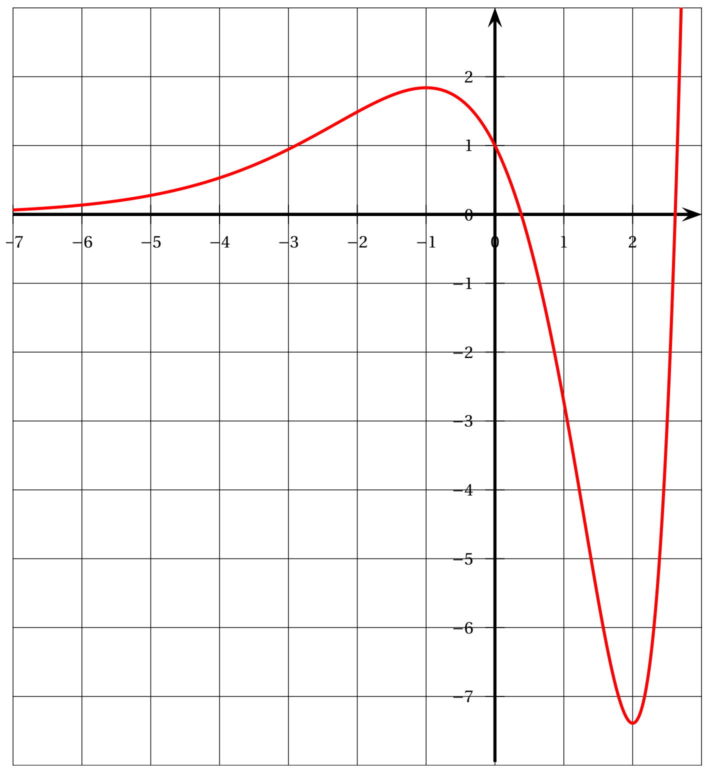
1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

Exercice 2 — 5 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right) \mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right) \mathrm{e}^x$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

4. Montrer que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.
5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.

Exercice 3 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. **b.** la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.
c. la suite (u_n) n'a pas de limite. **d.** la suite (u_n) converge.

2. Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques et on sait que $8,2\%$ des machines sont défectueuses. Il choisit au hasard et de façon indépendante 50 machines de l'entreprise. On assimile ce choix à un tirage avec remise. La probabilité qu'au moins 3 machines soient défectueuses est :

a. 0,136 **b.** 0,789 **c.** 0,864 d. 0,924

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ **b.** $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ **d.** $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

4. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def seuil():
    n=0
    u=12
    while u<100:
      n=n+1
      u=0.85*u+20
    return n
```

La valeur renvoyée par l'appel de la fonction `seuil` est :

a. 7 **b.** 8 **c.** 9 **d.** 10

5. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste ordonnée des numéros des trois boules tirées. Par exemple, $(34;21;28)$ et $(21;34;28)$ sont deux tirages différents.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

a. 50^3 **b.** $1\times2\times3$ **c.** $50\times49\times48$ **d.** $\dfrac{50\times49\times48}{1\times2\times3}$

Exercice 4 — 5 points

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{array}\right.$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \dfrac{1}{4}\ell$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).