Bac Blanc du 10/12/24 — Correction

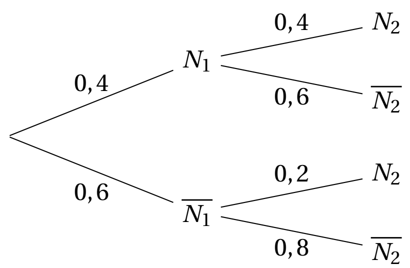
Exercice 1

Partie A

1. **(a)** Si on a pioché une boule blanche dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 1 boule noire et 4 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{\overline{N_1}}(N_2) = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

   (b) Dans U_1 il y a 4 boules noires et 6 boules blanches donc la probabilité de piocher une boule noire est $P(N_1) = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

   Si on a pioché une boule noire dans U_1 et qu'on l'a mise dans U_2, il y a dans l'urne U_2 2 boules noires et 3 boules blanches. La probabilité de piocher alors une boule noire dans l'urne U_2 est $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{2}{5} = 0,4$.



2. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.
3. On cherche la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P(N_2) = P(N_1 \cap N_2) + P\left(\overline{N_1} \cap N_2\right) = 0,16 + 0,6 \times 0,2 = 0,28$.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2.

   La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

   $P_{N_2}\left(\overline{N_1}\right) = \dfrac{P\left(N_2 \cap \overline{N_1}\right)}{P(N_2)} = \dfrac{0,12}{0,28} = \dfrac{3}{7} \approx 0,43$.

Partie B

1. D'après le texte, on est dans le cas de n répétitions, de façon identique et indépendante, d'une expérience qui n'a que deux issues.

   Donc la variable X qui donne le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2, suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,28$.
2. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $1 - 0,72^7 \approx 0,899$ et $1 - 0,72^8 \approx 0,928$ donc le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,72^n \geqslant 0,9$ est 8.
3. $0,72$ est la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2.

   $0,72^n$ est la probabilité de piocher n boules blanches dans l'urne U_2 lors des n tirages.

   $1 - 0,72^n$ est la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité de piocher au moins une boule noire lors des n tirages.

   Il faut donc au moins 8 tirages pour que la probabilité de piocher au moins une boule noire soit supérieure à $0,9$.

Partie C

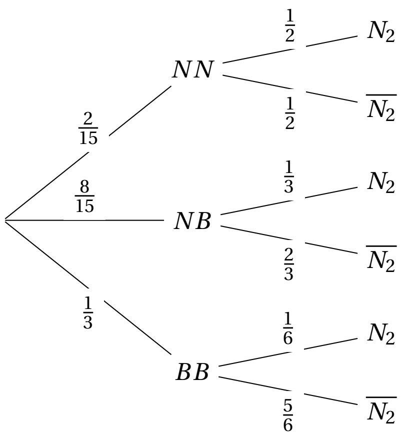
1. Dans l'urne U_1 il y a 10 boules et on en prend 2 simultanément ; il y a donc $\dbinom{10}{2} = 45$ tirages possibles.
2. Il y a 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 ; le nombre de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc $\dbinom{4}{1} \times \dbinom{6}{1} = 4 \times 6 = 24$.
3. On examine les différents cas.
   - On a pioché 2 boules noires dans U_1 (événement noté NN).
     - ▷ $P(NN) = \dfrac{\binom{4}{2}}{45} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$
     - ▷ On a mis les 2 boules noires piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 3 boules noires et 3 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
   - On a pioché 1 boule noire et 1 boule blanche dans U_1 (événement noté NB).
     - ▷ $P(NB) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
     - ▷ On a mis les 2 boules, une noire une blanche, piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 2 boules noires et 4 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
   - On a pioché 2 boules blanches dans U_1 (événement noté BB).
     - ▷ $P(BB) = \dfrac{\binom{6}{2}}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$
     - ▷ On a mis les 2 boules blanches piochées dans U_1 dans l'urne U_2 ; l'urne U_2 contient alors 1 boule noire et 5 boules blanches.

       La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est alors $\dfrac{1}{6}$.

   On résume la situation dans un arbre pondéré.



La probabilité de piocher une boule noire dans U_2 est, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(N_2) &= P(NN \cap N_2) + P(NB \cap N_2) + P(BB \cap N_2)\\
&= \frac{2}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\\
&= \frac{2}{30} + \frac{8}{45} + \frac{1}{18}\\
&= \frac{6}{90} + \frac{16}{90} + \frac{5}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3
\end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est égale à 0,3 ; elle est donc supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A qui était de 0,28.

EXERCICE 2

Partie A

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de la dérivée f'.
   - Sur $]-\infty\,;\,0,4[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
   - Sur $]0,4\,;\,2,6[$, $f' < 0$ donc f est strictement décroissante.
   - Sur $]2,6\,;\,+\infty[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $f'(x) = (2x-5)\,e^x + \left(x^2-5x+6\right) \times e^x = \left(2x-5+x^2-5x+6\right)e^x = \left(x^2-3x+1\right)e^x$
2. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, on étudie le signe de $f'(x)$.
   Pour tout x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2-3x+1.
   $\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 1 = 5 > 0$; $x' = \dfrac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		croissante		décroissante		croissante	

3. La tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :
   $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.
   - $f(x) = \left(x^2-5x+6\right)e^x$ donc $f(0) = 6e^0 = 6$
   - $f'(x) = \left(x^2-3x+1\right)e^x$ donc $f'(0) = 1e^0 = 1$

   $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = 1\,(x-0)+6$ soit $y = x+6$.
4. On sait que $f'(x) = (x^2-3x+1)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f'(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x^2-3x+1$ et $v(x) = e^x$. Ainsi $u'(x) = 2x-3$ et $v'(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}
   f''(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)\\
   &= (2x-3)e^x + (x^2-3x+1)e^x\\
   &= e^x(2x-3+x^2-3x+1)\\
   &= e^x(x^2-x-2)
   \end{aligned}$$
   Or $(x+1)(x-2) = x^2-2x+x-2 = x^2-x-2$.
   Donc on a bien $f''(x) = (x+1)(x-2)e^x$
5. **(a)** Pour étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

   (b) Sur $[-1\,;\,2]$, la fonction f est concave donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente $\mathcal{T}$ car $0 \in [-1\,;\,2]$.
   Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

EXERCICE 3

1. **Réponse d.** Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ c'est-à-dire

$$\frac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. En particulier, on peut affirmer que la suite (u_n) converge.

2. **Réponse b.** On note X la variable aléatoire qui, à un choix de 50 machines, associe le nombre de machines défectueuses. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,082$. Ainsi,
$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0,211 = 0,789$

3. **Réponse c.** On pose $u = x$ et $v = \mathrm{e}^x$. Ainsi, $u' = 1$ et $v' = \mathrm{e}^x$. Par suite, pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1-x}{\mathrm{e}^x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \text{ car } \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

4. **Réponse b.** Les différentes étapes de l'algorithme sont données dans le tableau suivant :

n	u	$u < 100$?
0	12	Vrai
1	30.2	Vrai
2	45.67	Vrai
3	58.8195	Vrai
4	69.996575	Vrai
5	79.49708875	Vrai
6	87.5725254375	Vrai
7	94.436646621875	Vrai
8	100.27114962859375	Faux

La valeur renvoyée par la fonction `seuil` est donc 8.

5. **Réponse c.** Un tirage est un 3-uplet d'éléments distincts de l'ensemble des 50 boules. Il y a donc $50 \times 49 \times 48$ tirages possibles.

EXERCICE 4

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{32}$

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.
On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $\quad w_0 = u_1 - \dfrac{1}{2}u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times 0 = \dfrac{1}{2}$.
2. On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n$.
Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que la propriété P_k est vraie, c'est-à-dire : $u_k = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On a alors :
$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2}u_k \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \mathbf{B.\ 4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2} \times k\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times (1+k) \\ u_{k+1} &= (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question } \mathbf{B.\ 5.} \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \big((n+1) - 2n\big) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n) \end{aligned}$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

— $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;

— $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :
$$\begin{aligned} \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.