Contrôle n°3

Durée: 2 h

EXERCICE 1 — 10 points

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.
On dispose d'un paquet de douze cartes, numérotées de 1 à 12. Les cartes numérotées de 1 à 4 sont rouges et les cartes numérotées de 5 à 12 sont bleues.
Dans cet exercice, on effectue selon différentes modalités, des tirages dans ce paquet de cartes.

Partie A - Première modalité

On tire **simultanément** trois cartes de ce paquet.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages qui ne contiennent que des cartes bleues.
   (b) Déterminer le nombre de tirages comportant trois cartes de même couleur, c'est-à-dire trois cartes rouges ou trois cartes bleues.
3. Combien y a-t-il de tirages comportant la carte numérotée 5 ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une carte rouge et deux cartes bleues ?

Partie B - Deuxième modalité

On tire **successivement** trois cartes du paquet en les remettant à chaque fois dans le paquet après les avoir tirées.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages dont la première carte est le 3.
   (b) Déterminer le nombre de tirages ne comportant que des cartes rouges.
3. Combien y a-t-il de tirages ne comportant pas la carte qui porte le numéro 1 ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant exactement une carte rouge ?

Partie C - Troisième modalité

On tire toujours **successivement** trois cartes mais, cette fois-ci, le tirage est sans remise c'est-à-dire que les cartes ne sont pas remises dans le paquet une fois tirées. Les trois cartes tirées sont donc distinctes.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages comportant uniquement des cartes bleues.
   (b) En déduire le nombre de tirages comportant au moins une carte rouge.
3. Combien y a-t-il de tirages dont la première carte porte le numéro 8 ?

EXERCICE 2 — 10 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 1,5 - \frac{1,5}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n < 1$$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

   (c) Que peut-on en déduire ?

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

   (b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{1+2u_n}$.

4. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   (b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).