Contrôle n°3 — Corrigé

Exercice 1

Partie A

1. Un tirage est une partie à 3 éléments de l'ensemble $E = \{1,2,\dots,12\}$. Il y a donc $\binom{12}{3} = \dfrac{12\times 11\times 10}{3!} = \dfrac{1320}{1\times 2\times 3} = 220$ tirages possibles.
2. (a) Un tirage ne contenant que des cartes bleues est une partie à 3 éléments de l'ensemble des huit cartes bleues. Il y a donc $\binom{8}{3} = \dfrac{8\times 7\times 6}{3!} = \dfrac{336}{1\times 2\times 3} = 56$ tirages possibles.

   (b) De même que dans la question précédente, il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages ne comportant que des cartes rouges. D'après le principe additif, il y a donc $4+56 = 60$ tirages comportant trois cartes rouges ou trois cartes bleues.
3. La carte numérotée 5 étant choisi, il s'agit de choisir 2 cartes parmi les 11 restantes. Il y a donc $\binom{11}{2} = 55$ possibilités.
4. Cela revient à choisir une carte rouge parmi les quatre du paquets et deux cartes bleues parmi les huit du paquet. D'après le principe multiplicatif, il y a $\binom{4}{1}\times\binom{8}{2} = 4\times 28 = 112$ possibilités.

Partie B

1. Un tirage est un 3-uplet de l'ensemble $E = \{1,2,\dots,12\}$. Il y a donc $12^3 = 1728$ tirages possibles.
2. (a) La carte 3 étant tirée en premier, il y a alors autant de tirages que de 2-uplets de l'ensemble $E = \{1,2,\dots,12\}$. Il y a donc $12^2 = 144$ possibilités.

   (b) Il y a 4 possibilités pour la première carte rouge. Il y a aussi 4 possibilités pour la deuxième carte rouge. Enfin, il y a 4 possibilité pour la dernière carte rouge. D'après le principe multiplicatif, il y a $4\times 4\times 4 = 64$ tirages possibles ne comportant que des cartes rouges.

   Remarque : on aurait aussi pu dire qu'un tel tirage est un 3-uplet de l'ensemble des quatre cartes rouges.
3. Un tirage qui ne comporte pas le 1 est un 3-uplet de l'ensemble $F = \{2,3,4,\dots,12\}$. Il y a donc $11^3 = 1331$ possibilités.
4. 1er cas : la carte rouge est tirée en premier. Les deux autres cartes sont donc bleues. Il y a donc $4\times 8\times 8 = 256$ possibilités.

   2ème cas : la carte rouge est tirée en deuxième. Il y a alors $8\times 4\times 8 = 256$ possibilités.

   3ème cas : la carte rouge est tirée en dernier. Il y a alors $8\times 8\times 4 = 256$ possibilités.

   D'après le principe additif, il y a $256+256+256 = 768$ possibilités.

Partie C

1. Un tirage est un 3-uplet d'éléments distincts de $E = \{1,2,\dots,12\}$. Il y a donc $12\times 11\times 10 = 1320$ possibilités.
2. (a) Un tirage ne comportant que des cartes bleues est un 3-uplet d'éléments distincts de l'ensemble des huit cartes bleues. Il y a donc $8\times 7\times 6 = 336$ possibilités.

   (b) Il y a donc $1320 - 336 = 984$ tirages comportant au moins une carte rouge.
3. La première carte étant tirée, il y a 11 possibilités pour la seconde et 10 possibilités pour la troisième. D'après le principe multiplicatif, il y a $11\times 10 = 110$ possibilités.

Exercice 2

1. (a) $u_1 = 1,5 - \dfrac{1,5}{1+2u_0} = 1,5 - \dfrac{1,5}{1+2\times\frac{1}{2}} = 1,5 - \dfrac{1,5}{1+1} = 1,5 - 0,75 = 0,75$

   $u_2 = 1,5 - \dfrac{1,5}{1+2u_1} = 1,5 - \dfrac{1,5}{1+2\times 0,75} = 1,5 - \dfrac{1,5}{2,5} = 1,5 - 0,6 = 0,9$

   (b) **Initialisation.** Si $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_0 < 1$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < u_n < 1$. Montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

   On a supposé que $0 < u_n < 1$

   donc $0 < 2u_n < 2$

   donc $1 < 1+2u_n < 3$

   donc $\dfrac{1}{1} > \dfrac{1}{1+2u_n} > \dfrac{1}{3}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

   donc $\dfrac{-1,5}{1} < -\dfrac{1,5}{1+2u_n} < \dfrac{-1,5}{3}$

   donc $-1,5 < -\dfrac{1,5}{1+2u_n} < -0,5$

   donc $1,5-1,5 < 1,5 - \dfrac{1,5}{1+2u_n} < 1,5-0,5$

   d'où $0 < u_{n+1} < 1$.

   L'hérédité est donc vérifiée.

   Conclusion. Ainsi, d'après le théorème de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 1,5 - \frac{1,5}{1+2u_n} - u_n \\
&= \frac{1,5(1+2u_n)}{1+2u_n} - \frac{1,5}{1+2u_n} - \frac{u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\
&= \frac{1,5(1+2u_n) - 1,5 - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\
&= \frac{1,5+3u_n - 1,5 - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} \\
&= \frac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} \\
&= \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}
\end{aligned}$$

(b) On sait que $u_n > 0$ et $1+2u_n > 0$. De plus, $u_n < 1$ alors $0 < 1 - u_n$ donc, d'après la règle des signes, $0 < u_{n+1} - u_n$. La suite (u_n) est bien croissante.

(c) Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème de convergence monotone elle converge vers un réel ℓ.

3. (a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 1,5 - \frac{1,5}{1+2u_n} \\
&= \frac{1,5(1+2u_n)}{1+2u_n} - \frac{1,5}{1+2u_n} \\
&= \frac{1,5(1+2u_n) - 1,5}{1+2u_n} \\
&= \frac{1,5+3u_n - 1,5}{1+2u_n} \\
&= \frac{3u_n}{1+2u_n}
\end{aligned}$$

(b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{3u_n}{1+2u_n} \\
&= \frac{1+2u_n}{1+2u_n} - \frac{3u_n}{1+2u_n} \\
&= \frac{1+2u_n - 3u_n}{1+2u_n} \\
&= \frac{1-u_n}{1+2u_n}
\end{aligned}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} &= \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}} \\
&= \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n} \\
&= \frac{3u_n}{1-u_n} \\
&= 3 \times \frac{u_n}{1-u_n} \\
&= 3v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 3$.

(b) La premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n$ d'où $v_n = 3^n$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n}{1-u_n} &\iff (1-u_n)v_n = u_n \\
&\iff v_n - u_n v_n - u_n = 0 \\
&\iff v_n - u_n(v_n+1) = 0 \\
&\iff v_n = u_n(v_n+1) \\
&\iff u_n = \frac{v_n}{v_n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

(d) Pour tout entier naturel n,

$$\frac{3^n}{3^n+1} = \frac{3^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = 0$ (car $3 > 1$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$.

Par somme et quotient des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.