Contrôle n°2

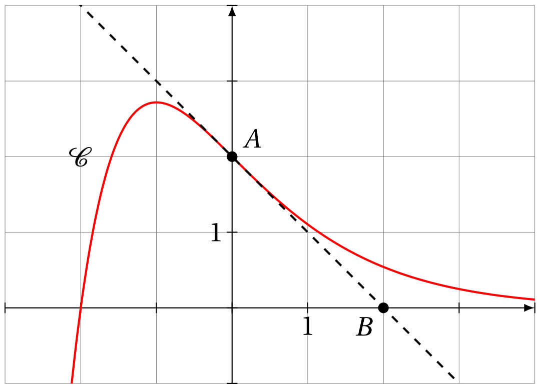
Durée: 2 h

EXERCICE 1 — 10 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0\,;\,2)$ et $B(2\,;\,0)$.

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, déterminer :

1. La valeur de $f(0)$.
2. Les coordonnées du point d'inflexion de la courbe de f.
3. La valeur de $f'(0)$.
4. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.
5. La valeur de $f'(-1)$.

Partie B

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
   On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
   On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse $a = 0$.
3. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}$ de f en justifiant la réponse.

EXERCICE 2 — 7 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

On a représenté en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

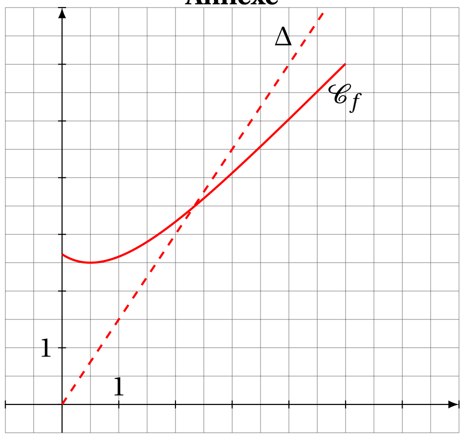
— la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;

— la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. (a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,5]$, on a $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0;5]$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

2. On note α l' abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.
   (a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
   (b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\ 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Annexe



Partie B : Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à raide d'une machine. La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. (a) Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
   (b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50€. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.
2. (a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   (b) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près des images de $2,32$ et de $2,33$ par la fonction B.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$. Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

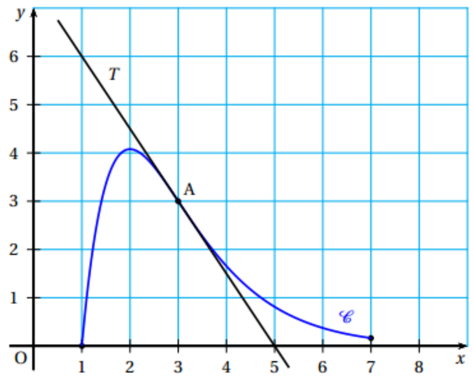
EXERCICE 3 — 3 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. On demande pour chaque question de donner la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

   (a) $]-\infty\,;\ +\infty[$ (b) $[-2\,;\ +\infty[$ (c) $]-\infty\,;\ -2]$ (d) $[-6\,;\ +\infty[$

2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1\,;\ 7]$. La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A$(3\,;\ 3)$ et passe par le point de coordonnées $(5\,;\ 0)$. Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



   On peut affirmer que :

   (a) $f'(3) = 3$ (b) $f'(3) = \dfrac{3}{2}$ (c) $f'(3) = -\dfrac{2}{3}$ (d) $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

3. On reprend la fonction f de la question précédente. On peut affirmer que :

   (a) $f''(3) = 3$ (b) $f''(3) = 0$ (c) $f''(5) = 0$ (d) $f''(2) = 0$