Contrôle n°2 — Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1. $f(0) = 2$.
2. Il y a un point d'inflexion à l'endroit où la tangente traverse la courbe. Le point d'inflexion est donc le point A et il a pour coordonnées $(0;2)$.
3. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Ainsi :
$f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = -1$
4. La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[0;4]$ car, sur cet intervalle, les tangentes sont situées en dessous de la courbe.
5. Comme la fonction semble avoir un maximum en $x = -1$, on en déduit que $f'(-1) = 0$ (la tangente en ce point est horizontale, donc le coefficient directeur de cette tangente est nul).

Partie B

1. (a) On pose $u = x+2$ $v = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, $u' = 1$ et $v' = (-1)\mathrm{e}^{-x}$. Par suite, pour tout réel x,
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (1 + (x+2) \times (-1))\,\mathrm{e}^{-x} = (1 - x - 2)\mathrm{e}^{-x} = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$

   (b) $-x-1 \geqslant 0 \iff -1 \geqslant x$. On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

   $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

2. $f(0) = (0+2)\mathrm{e}^{-0} = 2 \times 1 = 2$ et $f'(0) = (-0-1)\mathrm{e}^{-0} = -1 \times 1 = -1$
Une équation de la tangente au point d'abscisse $a = 0$ est :
$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) \iff y = -1 \times x + 2 \iff y = -x + 2$

3. (a) On pose $u = -x-1$ $v = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, $u' = -1$ et $v' = (-1)\mathrm{e}^{-x}$. Par suite, pour tout réel x,
$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = (-1 + (-x-1) \times (-1))\,\mathrm{e}^{-x} = (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$

   (b) On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   On en déduit que f est concave sur $]-\infty;0]$ et que f est convexe sur $[0;+\infty[$.

   (c) Puisqu'il y a un point d'inflexion au point d'abscisse 0 (la fonction passe de concave à convexe en ce point), la tangente T traverse alors la courbe : elle est située au-dessus de la courbe avant $x = 0$ et est située en-dessous de la courbe après $x = 0$.

EXERCICE 2

Partie A

1. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 + 0 + (-1) \times \mathrm{e}^{-x+0,5} = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.

   (b) $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{-x+0,5} \iff \mathrm{e}^{0} \geqslant \mathrm{e}^{-x+0,5} \iff 0 \geqslant -x + 0,5 \iff x \geqslant 0,5$

   (c) D'après la question précédente, on a le tableau suivant :

x	0		$0,5$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$1+\mathrm{e}^{0,5}$	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$6+\mathrm{e}^{-4,5}$

   $f(0) = 0 + 1 + \mathrm{e}^{-0+0,5} = 1 + \mathrm{e}^{0,5}$

   $f(0,5) = 0,5 + 1 + \mathrm{e}^{-0,5+0,5} = 1,5 + \mathrm{e}^{0} = 2,5$

   $f(5) = 5 + 1 + \mathrm{e}^{-5+0,5} = 6 + \mathrm{e}^{-4,5}$

2. (a) Graphiquement, on voit que $2 < \alpha < 2,5$.

   (b) Graphiquement, l'ensemble des solutions de $f(x) < 1,5x$ est environ $[2,25;5]$.

Partie B

1. (a) La fonction f possède un minimum pour $x = 0,5$ donc il faut produire $0,5 \times 100 = 50$ cartes pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

   (b) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût. Ainsi, pour tout $x \in [0;5]$, $B(x) = 1,5x - f(x) = 1,5x - (x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}) = 1,5x - x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5} = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$

2. (a) Pour tout $x \in [0;5]$, $B'(x) = 0,5 - (-1)\mathrm{e}^{-x+5} = 0,5 + \mathrm{e}^{-x+0,5}$. Ainsi, $B'(x) > 0$ sur $[0;5]$ en tant que somme de deux nombres strictement positifs. Par suite, la fonction B est strictement croissante sur $[0;5]$.

   (b) $B(2,32) = 0,5 \times 2,32 - 1 - \mathrm{e}^{-2,32+0,5} \approx -0,002$ et $B(2,33) = 0,5 \times 2,33 - 1 - \mathrm{e}^{-2,33+0,5} \approx 0,005$

3. Puisque la fonction B est strictement croissante, d'après la question précédente, le bénéfice devient strictement positif à partir de $2,33$ (à 10^{-3} près). La quantité minimale de cartes qui doit figurer sur le carnet de commandes est donc de 233 cartes.

EXERCICE 3

1. **Réponse (b).** Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 12x$ et $f''(x) = 6x + 12$. Ainsi,
   $f''(x) \geqslant 0 \iff 6x + 12 \geqslant 0 \iff 6x \geqslant -12 \iff x \geqslant \frac{-12}{6} = -2$
   Ainsi, f'' est positive uniquement sur $[-2;+\infty[$ donc f est convexe sur $[-2;+\infty[$.

2. **Réponse (d).** Considèrons le point $B(5;0)$ qui est situé sur la tangente T. Puisque $f'(3)$ est le coefficient directeur de T, on a
   $f'(3) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{5-3} = \dfrac{-3}{2}$

3. **Réponse (b).** Puisque le point A qui a pour abscisse 3 est un point d'inflexion, cela entraîne que f'' s'annule en 3 en changeant de signe. Ainsi, $f''(3) = 0$.