

## Contrôle n°10

Durée : 2 h

## EXERCICE 1 — 10 points

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

On admet que  $u_1 = e - 2$ .

1. (a) Justifier que pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ .
- (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
- (c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

- (b) En déduire la valeur de  $u_2$ .
- (c) On considère le script Python ci-dessous :

```

from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return

```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de  $\int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- (b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

## EXERCICE 2 — 10 points

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left( \frac{e^{-x}}{2-x} \right) dx$$

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f'(x) = \frac{e^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$ .
  - (b) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - (c) En déduire que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

2. Soit  $J$  et  $K$  les intégrales définies par

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx \text{ et } K = \int_0^1 x^2 f(x) dx.$$

- (a) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que  $J = 3 - \frac{4}{e}$ .
- (b) Calculer  $\int_0^1 x^2 dx$ .
- (c) En utilisant l'encadrement de  $f(x)$  obtenu dans la question 1.(c), démontrer que

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

- (d) Démontrer que  $J + K = 4I$ .
- (e) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de  $I$ , puis donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $I$ .