Contrôle n°10 — Corrigé

Exercice 1

1. (a) Pour $x \in [0\,;\,1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$.
$x \geqslant 0$ donc $x^n \geqslant 0$; on multiplie l'inégalité précédente par x^n :
$0 \times x^n \leqslant x \times x^n \leqslant 1 \times x^n \iff 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$
On a donc démontré que pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n}$$

(b) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \iff 0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x}.$$

Donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \implies 0 \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x \iff \boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

(c) D'après la question précédente, puisque $u_{n+1} \leqslant u_n$ la suite (u_n) est décroissante.
De plus, puisque $0 \leqslant u_n$, elle est minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite positive ou nulle.

2. (a) On sait que pour u et v dérivables on a : $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.
Posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$. Alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x &= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-\mathrm{e}^{1-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -1^{n+1}\mathrm{e}^{1-1} - \left(-0^{n+1}\mathrm{e}^{1-0}\right) - (n+1)\int_0^1 -x^n\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x \\
&= -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (n+1)u_n - 1}.$$

(b) $u_2 = u_{1+1} = (1+1)u_1 - 1 = 2u_1 - 1 = 2(\mathrm{e}-2) - 1 = 2\mathrm{e} - 4 - 1 = 2\mathrm{e} - 5$

(c) On complète le script Python en bleu ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

```
    from math import exp
def  suite() :
     u = exp(1)-2
     for n in range (1,8):
         u = (n+1) * u - 1
     return u
```

3. (a) On se place dans l'intervalle d'intégration : soit $x \in [0\,;\,1]$, donc
$0 \leqslant x \leqslant 1 \implies 1 - x \leqslant 1 \implies \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$ (croissance de la fonction exponentielle)
$\implies x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \times \mathrm{e}$ ($x^n \geqslant 0$)
$\implies \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\underset{\cdot}{x} \leqslant \int_0^1 x^n \times \mathrm{e}\underset{\cdot}{x}$ (craoissance de l'intégration)
$\implies \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\underset{\cdot}{x} \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 x^n\underset{\cdot}{x} \implies u_n \leqslant \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$
$\implies u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

(b) On sait que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n$; donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 2

1. (a) On pose $u = \mathrm{e}^{-x}$ et $v = 2 - x$. On a alors $u' = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v' = -1$. Ainsi, $\forall x \in [0;1]$,
$f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x} \times (2-x) - \mathrm{e}^{-x} \times (-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}(2-x) + \mathrm{e}^{-x}}{(2-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(-(2-x)+1)}{(2-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(x-1)}{(2-x)^2}$

(b) Tout d'abord, $x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$. On a donc le tableau suivant :

x	0	1
e^{-x}	$+$	
$x-1$	$-$	0
$(2-x)^2$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0
f	$\searrow$	

(c) D'après la question précédente, pour tout $x \in [0;1]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$.
Or, $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{-0}}{2-0} = \dfrac{1}{2}$.
Cela montre donc que pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. (a) On pose $u = 2 + x$ et $v' = \mathrm{e}^{-x}$.
On a alors $u' = 1$ et $v = -\mathrm{e}^{-x}$.
En appliquant la formule d'intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}
J = \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \left[(2+x)(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x \\
&= (2+1)(-\mathrm{e}^{-1}) - (2+0)(-\mathrm{e}^{-0}) - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \\
&= -3\mathrm{e}^{-1} + 2 - (\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-0}) \\
&= -3\mathrm{e}^{-1} + 2 - (\mathrm{e}^{-1} - 1) \\
&= 3 - 4\mathrm{e}^{-1} = 3 - 4 \times \frac{1}{\mathrm{e}} = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times 0^3 = \frac{1}{3}$

(c) D'après la question 1.(c), pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}}x^2 \leqslant x^2 f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x^2$
Par suite, par positivité de l'intégrale,
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$
donc $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x \leqslant K \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$
donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{3} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

(d)

$$\begin{aligned}
J + K &= \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2 \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [(2+x) + \frac{x^2}{2-x}]\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(2+x)(2-x)+x^2}{2-x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4-x^2+x^2}{2-x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4}{2-x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}f(x)\mathrm{d}x = 4I
\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente, $I = \dfrac{J+K}{4}$. Or, $\dfrac{3}{\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$
donc $J + \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant J + K \leqslant J + \dfrac{1}{6}$
donc $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant J + K \leqslant 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{6}$
d'où $\dfrac{3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{3\mathrm{e}}}{4} \leqslant I \leqslant \dfrac{3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{6}}{4}$
Or, $\dfrac{3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{3\mathrm{e}}}{4} \approx 0{,}413$ et $\dfrac{3 - \frac{4}{\mathrm{e}} + \frac{1}{6}}{4} \approx 0{,}424$ donc $I \approx 0{,}42$.