Contrôle n°1

Durée: 2 h

EXERCICE 1 — 10 points

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.
On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   (b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 10 800.

   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   (c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ......:
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ dont on précisera le premier terme.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   (d) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12500$. Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

EXERCICE 2 — 10 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit n un entier naturel.
   Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for k in range(1,n+1) :
        u = ...
    return u
```

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   On donne ci-dessous les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5
v_n	1	5	25	125	625	3125

   (a) Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.