Contrôle n°1 — Corrigé

EXERCICE 1

1. (a) On rappelle que diminuer une quantité de 2% revient à multiplier par $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

   Pour déterminer le nombre u_{n+1} de panneaux à l'année $2020 + (n+1)$:

   - on diminue le nombre u_n de panneaux de l'année précédente $2020 + n$ de 2%, ce qui donne $0,98u_n$
   - on ajoute 250 nouveaux panneaux ce qui donne $0,98u_n + 250$

   Finalement, on obtient $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$ ce qui justifie que cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   (b) En calculant les termes de la suite (u_n) à la calculatrice, on trouve que $u_6 \approx 10781$ et $u_7 \approx 10816$. Le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 10800 au bout de 7 ans c'est-à-dire en 2027.

   (c) Voici l'algorithme complété :

```
u = 10560
n = 0
while u <= 10800 :
    u = 0.98*u + 250
    n = n + 1
```

2. **Initialisation.** Si $n = 0$, $u_0 = 10560$ donc $u_0 \leqslant 12500$. L'initialisation est donc vérifiée.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On suppose que $u_n \leqslant 12500$.

   Montrons que $u_{n+1} \leqslant 12500$.

   On a supposé que $u_n \leqslant 12500$

   donc $0,98u_n \leqslant 12250$

   donc $0,98u_n + 250 \leqslant 12250 + 250$

   donc $u_{n+1} \leqslant 12500$

   donc l'hérédité est vérifiée.

   Conclusion. D'après le théorème de la récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 12500$.

3. Pour tout entier naturel n,

   $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = -0,02u_n + 250$

   Or, $u_n \leqslant 12500$

   donc $-0,02u_n \geqslant -250$

   donc $-0,02u_n + 250 \geqslant -250 + 250$

   d'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

   Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4. (a) Soit n un entier naturel.

   On remarque tout d'abord que $v_n = u_n - 12500 \iff u_n = v_n + 12500$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 12500 \\
&= 0,98u_n + 250 - 12500 \\
&= 0,98u_n - 12250 \\
&= 0,98(v_n + 12500) - 12250 \\
&= 0,98v_n + 12250 - 12250 \\
&= 0,98v_n
\end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 12500$ donc $u_n = -1940 \times 0,98^n + 12500$.

   (d) Cela signifie que, à long terme, le nombre de panneaux solaires de la centrale solaire va se rapprocher de 12500 panneaux.

EXERCICE 2

1. $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 5 \times 0 - 0 + 6 = 6$
   $u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$
2. Voici l'algorithme complété :

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for k in range(1,n+1) :
        u = 5*u - 8*k + 6
    return u
```

3. (a) **Initialisation.** Si $n = 0$ alors, d'une part, $u_0 = 0$ et, d'autre part, $2 \times 0 = 0$. On a donc $u_0 \geqslant 2 \times 0$. L'initialisation est donc vérifiée.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On suppose que $u_n \geqslant 2n$.
   Montrons que $u_{n+1} \geqslant 2(n+1)$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 2n+2$.
   On a supposé que $u_n \geqslant 2n$
   donc $5u_n \geqslant 10n$
   donc $5u_n - 8n \geqslant 2n$
   donc $5u_n - 8n + 6 \geqslant 2n + 6$
   donc $u_{n+1} \geqslant 2n + 6 \geqslant 2n + 2$ car $6 \geqslant 2$
   d'où $u_{n+1} \geqslant 2n + 2$.
   Ainsi, l'hérédité est vérifiée.
   Conclusion. D'après le théorème de la récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2n$.

   (b) On sait que :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2n$
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$

   donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors, par définition, pour tout nombre réel A, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant A$. En particulier, pour $A = 10^p$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$.
   Or, $u_n \geqslant 2n$
   donc $4u_n \geqslant 8n$
   donc $4u_n - 8n \geqslant 0$
   donc $4u_n - 8n + 6 \geqslant 6$
   d'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 6 > 0$
   Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

5. (a) On conjecture que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 5v_n$.

   (b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 1 \\ &= 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 \\ &= 5u_n - 10n + 5 \\ &= 5(u_n - 2n + 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

   Par conséquent, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$.

   (c) Comme la suite (v_n) est géométrique, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 1 \times 5^n$ d'où $v_n = 5^n$.
   Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2n + 1 \iff u_n = v_n + 2n - 1$ d'où $u_n = 5^n + 2n - 1$.