Nombres, calculs et fonctions

Calculs algébriques

Développement

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme.

- $k(a+b) = ka + kb$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Factorisation

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en un produit.
Pour factoriser, on peut soit reconnaître un facteur commun, soit utiliser une identité remarquable.

Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Équations « produit nul »

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins de ses facteurs est nul.
$A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

Équations « quotient nul »

Un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.
$\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

Notation puissance

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{a \times a \times \cdots \times a}$

Par convention, $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.

Règles de calcul pour les puissances

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Définition d'une racine carrée

La racine carrée d'un nombre a positif est l'unique nombre positif dont le carré vaut a. On le note $\sqrt{a}$.
On a donc $(\sqrt{a})^2 = a$.

Règles de calcul pour les racines carrées

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (si $b \neq 0$).

Ensemble des nombres réels

Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Un nombre entier positif ou nul s'appelle un entier naturel.
Exemples : $0 ; 1 ; 2 ; \ldots$

Ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

Un nombre entier positif, nul ou négatif s'appelle un entier relatif.
Exemples : $-18 ; -24 ; 3 ; 9 ; \ldots$

Ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$

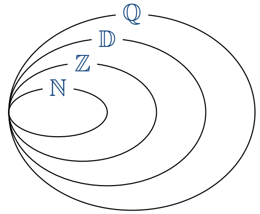
Un nombre décimal est un nombre de la forme $\dfrac{a}{10^k}$ où a est un nombre relatif et k est un entier naturel. Un nombre décimal possède un nombre fini de décimales non nulles après la virgule.
Exemples : $244/100 ; -37/1000 ; 3,45 ; \ldots$
Le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Un nombre de la forme $\dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers s'appelle une fraction ou un nombre rationnel.
Exemples : $3/7 ; -28/19 ; -0,5 ; 4/10 ; 3 ; \ldots$
Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

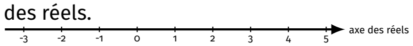
Inclusions

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$



L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est l'ensemble qui contient tous les nombres que vous connaissez. On le représente à l'aide d'un axe gradué qu'on appelle l'axe des réels.

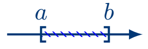
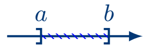
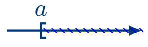
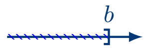
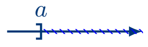


Intervalles

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une portion de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

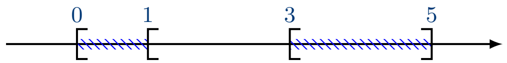
- soit un segment ;
- soit une demi-droite ;
- soit la droite des réels tout entière.

Les différents types d'intervalles

Type d'intervalle	Ensemble des x tels que...	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Réunion d'intervalles

La réunion des intervalles I et J est l'ensemble $I \cup J$ qui contient les éléments qui sont soit dans l'intervalle I ou dans l'intervalle J.
On a hachuré $[0;1[\cup [3;5]$ ci-dessous :



Intersection d'intervalles

L'ensemble qui contient les éléments qui sont soit dans l'intervalle I *et* dans l'intervalle J se note $I \cap J$.
C'est l'intersection des intervalles I et J.

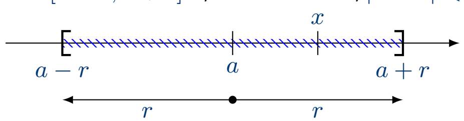
Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x est la distance de x à 0 sur l'axe des réels. On la note $|x|$.

- $|x| = x$ si $x \geqslant$ et $|x| = -x$ sinon.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

Distance entre deux réels

La distance entre deux réels a à b est le nombre $|b-a|$.
$x \in [a-r; a+r]$ si, et seulement si, $|x-a| \leqslant r$.



Encadrement d'un réel par un décimal

Donner un encadrement d'un nombre réel x par deux nombres décimaux, c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
La distance $b-a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement.
On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près si son amplitude est égale à 10^{-n}.

Généralités sur les fonctions

Notion de fonction

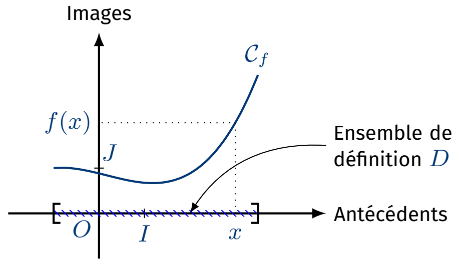
La fonction f qui, à un nombre x, associe le nombre $f(x)$ se note :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- L'ensemble D s'appelle **l'ensemble de définition**.
- Le nombre x s'appelle un **antécédent**.
- Le nombre $f(x)$ s'appelle l'**image** de x.

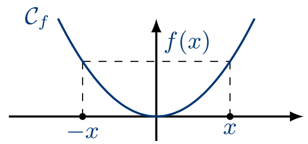
Courbe d'une fonction

La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $y = f(x)$.
Cette courbe s'appelle la courbe représentative de f et se note $\mathcal{C}_f$.



Fonction paire

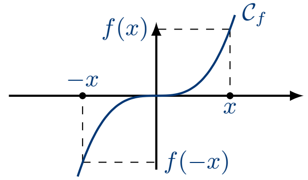
On dit que f est une fonction paire si l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.



La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire

On dit que f est une fonction impaire si l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

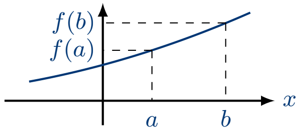


La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Variations de fonctions

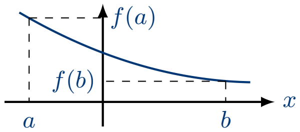
Fonction croissante

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsque :
si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$



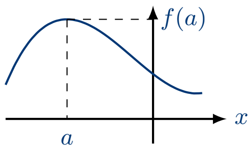
Fonction décroissante

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I lorsque :
si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$



Maximum d'une fonction

On dit que $f(a)$ est le maximum de la fonction f sur un intervalle I si, pour tout x dans l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(a)$. On dit alors que le maximum est atteint en $x = a$.



Minimum d'une fonction

On dit que $f(b)$ est le minimum de la fonction f sur un intervalle I si, pour tout x dans l'intervalle I, $f(x) \geqslant f(b)$. On dit alors que le minimum est atteint en $x = b$.

Fonctions affines

Les fonctions affines

Une fonction qui est définie par une formule du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels donnés s'appelle une fonction affine.

- Si $b = 0$ alors f s'appelle une fonction linéaire, de coefficient de proportionnalité a.
- Si $a = 0$ alors f s'appelle une fonction constante.

Le nombre a s'appelle le coefficient directeur ou la pente. Le nombre b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite qui passe par le point de coordonnées $(0; b)$.

Calcul du coefficient directeur

Si A et B deux point situés sur la droite représentative de f alors le coefficient directeur de f est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Sens de variation d'une fonction affine

Une fonction affine $f(x) = ax + b$ est :

- croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$
- décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$
- constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$

Tableau de signes d'une fonction affine

Si $f(x) = ax + b$ est une fonction affine, alors :
Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

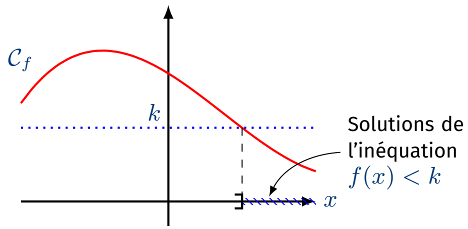
Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

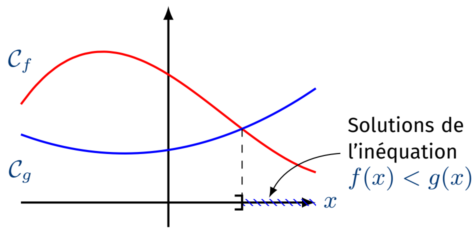
Si $a = 0$, f est constante, du signe de b.

Inéquations

Inéquations graphiques du type $f(x) > k$



Inéquations graphiques du type $f(x) < g(x)$



Inégalités

Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

Inéquations du 1er degré

Il faut changer le sens d'une inégalité quand on la multiplie ou quand on la divise par un nombre *négatif*.

Inéquations « produit »

Exemple : Résoudre $(x-1)(x-2) > 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0		$+$		
$2-x$			$+$		0	$-$	
$(x-1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]1; 2[$

Inéquations « quotient »

Exemple : Résoudre $\dfrac{x+4}{x-2} \geqslant 0$
La valeur interdite est $x = 2$.

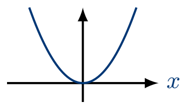
x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0		$+$		
$x-2$			$-$		0	$+$	
$\frac{x+4}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S =]-\infty, -4] \cup]2; +\infty[$.

Fonctions de référence

Fonction carré (1)

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative s'appelle une parabole.



Fonction carré (2)

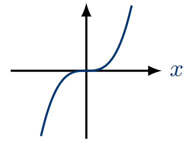
- La fonction carré est une fonction paire.
- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Fonction carré (3)

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ possède un seule solution : 0.
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Fonction cube (1)

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



Fonction cube (2)

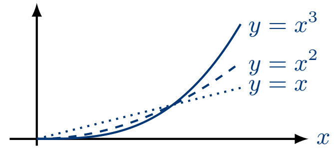
- La fonction cube est une fonction impaire.
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Fonction cube (3)

Pour tout nombre réel a, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution qu'on appelle racine cubique de a.

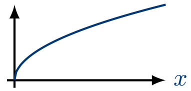
Position relative de courbes

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
- Si $1 \leqslant x$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.



Fonction racine carré (1)

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Fonction racine carré (2)

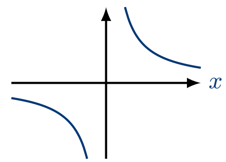
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Fonction racine carré (3)

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Fonction inverse (1)

La fonction inverse est la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sa représentation graphique s'appelle une hyperbole.



Fonction inverse (2)

- La fonction inverse est une fonction impaire.
- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$.

Arithmétique

Multiples et diviseurs

Si a et b sont deux entiers tels qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$ alors on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a
- b divise a.

Somme de multiples d'un même nombre

La somme de deux multiples d'un entier a est aussi un multiple de a.

Nombres pairs et impairs

- Un nombre n pair est un nombre de la forme $n = 2 \times k$ avec k entier.
- Un nombre n impair est un nombre de la forme $n = 2 \times k + 1$.

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Nombres premiers

Un nombre premier est un nombre qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
Exemples : 2, 3 et 5 sont premiers mais 8 ne l'est pas.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de puissances de nombres premiers de manière unique (à l'ordre près).
Exemple : $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Simplification de fractions

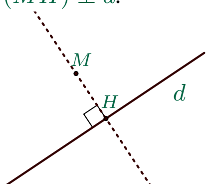
Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur n'ont qu'un seul diviseur positif en commun, à savoir 1.
Pour simplifier une fraction qui n'est pas irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par un diviseur en commun.

Géométrie

Configurations dans le plan

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

On appelle projeté orthogonal de M sur la droite d le point H tel que $(MH) \perp d$.



Distance d'un point à une droite

Le projeté orthogonal H du point M sur une droite d est le point de cette droite qui est le plus proche de M. La distance MH s'appelle alors la distance du point M à le droite d.

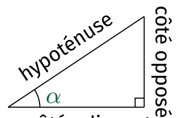
Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, si α est un angle aigu $(0° < \alpha < 90°)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha}$$

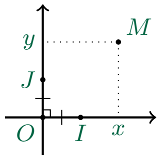


Formule de trigonométrique

Dans un triangle rectangle, si α est un angle aigu alors $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$.

Repères orthonormés

On dit que le triplet $(O; I; J)$ est un repère orthonormé si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.



Milieu de deux points

Les coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$ sont $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

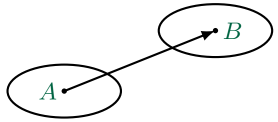
Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, la distance du point $A(x_A, y_A)$ au point $B(x_B, y_B)$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Vecteurs

Notion de vecteur

Une translation peut être représentée à l'aide d'une flèche qu'on appelle vecteur. Si une translation transforme un point A en un point B, on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par :

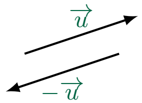
- une direction (c'est-à-dire la droite qui « porte » $\overrightarrow{u}$)
- un sens
- une norme c'est-à-dire la longueur du vecteur(que l'on note $||\overrightarrow{u}||$).

Vecteur nul

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même s'appelle le vecteur nul.
On le note $\overrightarrow{0}$.

Opposé d'un vecteur

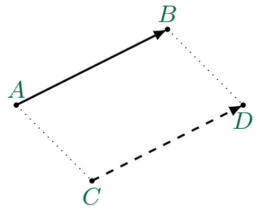
L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a la même direction et la même norme que $\overrightarrow{u}$ mais qui a un sens opposé. On le note $-\overrightarrow{u}$.



Pour tous points A et B, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

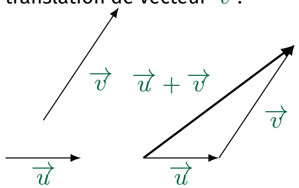
Egalité de vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ces deux vecteurs ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



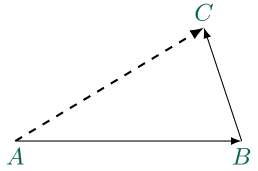
Somme de deux vecteurs

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur obtenu en appliquant successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Coordonnées d'un vecteur

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur tel que :

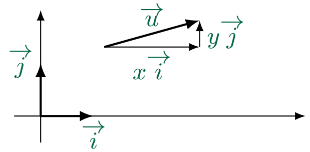
- $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$
- $\begin{cases} k\overrightarrow{u} \text{ a le même sens que } \overrightarrow{u} \text{ si } k \geqslant 0 \\ k\overrightarrow{u} \text{ a un sens opposé à } \overrightarrow{u} \text{ si } k \leqslant 0 \end{cases}$
- La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$

Base orthonormée

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une **base orthonormée** si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs dont les directions sont perpendiculaires et dont la norme vaut 1.
On dit alors que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé.

Décomposition dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On dit alors que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.



Si k un réel et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \end{pmatrix}$.

Colinéarité de vecteurs

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Caractérisation de la colinéarité
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Déterminant de deux vecteurs
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre dét$(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Colinéarité et déterminant
Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

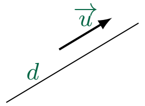
Application de la colinéarité (1)
$(AB)//(CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Application de la colinéarité (2)
A, B et C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Application de la colinéarité (3)
I est le milieu de $[AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Équations de droites

Vecteur directeur
Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d si sa direction est celle de d.

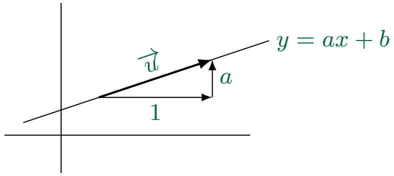


Équation cartésienne (1)
Si d est une droite, il existe trois nombres réels a, b et c non tous nuls tels que d soit l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$.
L'équation $ax + by + c = 0$ s'appelle une équation cartésienne de la droite d.

Équation cartésienne (2)
L'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec a et b non tous nuls) est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Équation réduite d'une droite
Si d est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une unique équation de la forme $y = ax + b$. Cette équation s'appelle l'équation réduite de la droite d.
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur ou la pente et le nombre b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Vecteur directeur à partir de l'équation réduite
Si d est une droite d'équation réduite $y = ax + b$ alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.



Parallélisme
Soit d et d' deux droites qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées dont les équations réduites sont $d : y = ax + b$ et $d' : y = a'x + b'$

- d et d' sont parallèles ou confondues si, et seulement si, $a = a'$
- d et d' sont strictement parallèles $\iff a = a'$ et $b \neq b'$.

Intersection de deux droites
Soit d et d' deux droites qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées.
d et d' sont sécantes si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont différents.

Systèmes d'équations
Pour résoudre un système d'équations, on peut combiner les lignes afin de faire disparaître une des inconnues.

Statistiques et probabilités

Proportions et pourcentages

Population et sous-population
Une population est un ensemble d'individus (qui peuvent être des personnes, des objets, ...).
Une sous-population est une partie de la population.

Proportion d'une sous-population
Pour trouver la proportion que représente une sous-population dans une population, il faut diviser l'effectif de cette sous-population par l'effectif total de la population.

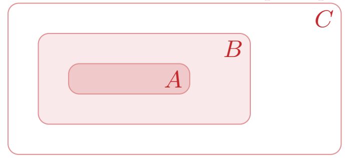
Proportion en pourcentage
Un pourcentage est le numérateur d'un nombre qui s'écrit comme une fraction sur 100.
Pour transformer une proportion en pourcentage, il suffit de la multiplier par 100.

Retrouver un effectif à partir de la proportion
Prendre $p\%$ d'un effectif revient à multiplier cet effectif par $\dfrac{p}{100}$.

Pourcentage de pourcentage
Si A, B et C sont trois populations telles que :

- La population A est incluse dans la population B et la population B est incluse dans la population C.
- La proportion de A dans B est p_1.
- La proportion de B dans C est p_2.

Alors, la proportion de A dans C est $p_1 \times p_2$.



Évolutions

Augmenter ou diminuer d'un pourcentage
- Augmenter une quantité de $p\%$ revient à la multiplier par $1 + \frac{p}{100}$.
- Diminuer une quantité de $p\%$ revient à la multiplier par $1 - \frac{p}{100}$.

Coefficients multiplicateurs
Les nombres $1 + \frac{p}{100}$ et $1 - \frac{p}{100}$ s'appellent des coefficients multiplicateurs. Pour déterminer l'évolution d'une quantité, il suffit de multiplier par le coefficient multiplicateur.

Variation absolue
Si une quantité vaut V_A au départ et qu'elle vaut V_D à l'arrivée, sa variation absolue est $V_D - V_A$.

Taux d'évolution
Le taux d'évolution (ou variation relative) t d'une quantité est $t = \dfrac{V_A - V_D}{V_D}$ où V_D est la valeur de départ et V_A est la valeur d'arrivée. le pourcentage duquel elle augmente ou elle diminue.
Si elle augmente, le taux d'évolution est positif. Si elle diminue, le taux d'évolution est négatif.

Évolutions successives
Pour calculer le coefficient multiplicateur global de plusieurs évolutions successives, il faut multiplier les différents coefficients multiplicateurs entre eux.

Évolution réciproque
Si une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A, l'évolution réciproque est l'évolution allant de V_A à V_D.
Le coefficient multiplicateur d'une évolution réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de départ.

Statistiques

Moyenne
La **moyenne pondérée** d'une série de valeurs x_i d'effectifs n_i et de fréquence f_i est :
$\overline{x} = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$
$\overline{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$

- Si toutes les valeurs d'une série statistique sont multipliées par un nombre a alors la moyenne est elle aussi multipliée par a.
- Si on ajoute un nombre b à toutes les valeurs d'une série statistique alors la moyenne est elle aussi augmentée de b.

Médiane
La médiane M_e d'une série est un nombre qui partage cette série en deux séries de même effectif lorsque la série de départ est *rangée dans l'ordre croissant*.
Pour déterminer la médiane d'une série de N valeurs, on détermine le plus grand nombre entier n supérieur ou égal à $\dfrac{N}{2}$.

- Si N est un nombre impair alors la médiane est la $n^{\text{ème}}$ valeur.
- Si N est un nombre pair alors la médiane est le milieu de la $n^{\text{ème}}$ et de la $(n+1)^{\text{ème}}$ valeur.

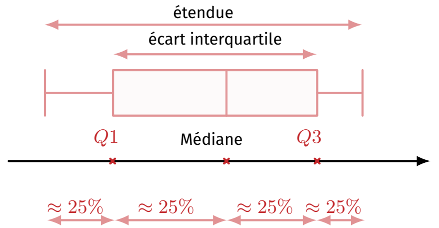
Étendue
L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

Quartiles
- Le premier quartile $Q1$ d'une série est la plus petite valeur de la série telle qu'*au moins* 25% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q1$.
- Le troisième quartile $Q3$ d'une série est la plus petite valeur de la série telle qu'*au moins* 75% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q3$.

Pour calculer le premier quartile d'une série contenant N valeurs, on calcule le plus grand entier n supérieur ou égal à $\dfrac{N}{4}$. Le premier quartile est alors la $n^{\text{ème}}$ valeur de la série.
Pour calculer le troisième quartile, on fait de même avec $\dfrac{3N}{4}$.

Écart interquartile
L'écart interquartile est la différence entre le 3ème quartile et le 1er quartile, c'est-à-dire $Q3 - Q1$.

Diagramme en boîte



Écart-type

L'écart-type σ (« sigma ») d'une série de valeurs x_i d'effectifs n_i est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{x})^2}{n_1 + \cdots + n_p}}$$

Probabilités

Vocabulaire

- Une expérience aléatoire est une expérience dans laquelle intervient le hasard. Une issue est un des résultats possibles de cette expérience.
- L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles.

Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité sur un univers $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, c'est attribuer à chacune des issues x_i un nombre $p_i \in [0; 1]$ qu'on appelle probabilité de telle sorte que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
Une loi de probabilité est représentée à l'aide d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Équiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité. S'il y a n issues, chacune d'elle a pour probabilité $\frac{1}{n}$.

Modéliser une expérience aléatoire

Choisir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Loi des grands nombres

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de choisir cette valeur comme probabilité de l'issue.

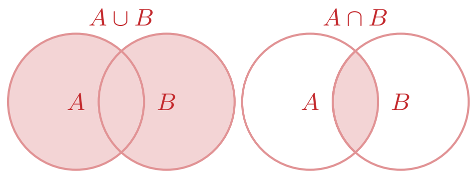
Notion d'événement

Un événement A est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble d'issues. Un événement qui ne contient qu'une seule issue s'appelle événement élémentaire.

Union et intersection d'événements

Si A et B sont deux événements alors :

- la réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui sont dans A *ou* dans B.
- l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui sont dans A *et* dans B.



Événements incompatibles

Deux événements qui n'ont aucune issue en commun sont dits incompatibles ou disjoints.

Événements contraires

Si A est un événement, l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ est l'événement constitué de toutes les issues qui ne sont pas dans A.

Probabilité d'un événement

Si A est un événement alors la probabilité de A, qu'on note $P(A)$, est la somme des probabilités de toutes les issues qui composent cet événement.
Lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre d'issues de } \Omega}$$

Probabilité de l'union de deux événements

Pour tous événements A et B,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité de l'événement contraire

Pour tout événement A,
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Échantillonnage

Échantillon

Un échantillon de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues que l'on répète de manière indépendante est l'ensemble des résultats obtenus lorsqu'on répète n fois cette expérience aléatoire.

Fluctuation

On considère une expérience aléatoire à deux issues que l'on répète de manière indépendante. On note p la probabilité d'une des issues et on considère un échantillon de taille n. Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée f de cette issue est proche de la probabilité p.
Dans une grande majorité des cas, l'écart entre f et p est même inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Estimation d'une proportion dans une population

Si on ignore la proportion p d'un certain caractère dans une population, on peut essayer de l'estimer en tirant un échantillon de taille suffisamment grande et en calculant la fréquence de ce caractère dans l'échantillon.

Algorithmique et programmation

Algorithmique

Algorithme et programmation

Un algorithme est une suite finie d'instructions à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat.
Un algorithme peut être écrit dans un langage compréhensible par un humain : on parle de *langage naturel*.

Notion de variable

Une variable est un symbole qui est associé à une valeur. Les variables sont utilisées pour stocker des valeurs.

Affectation

Le fait de donner une valeur à une variable s'appelle une instruction d'affectation.
En langage naturel, on écrit cela : « X prend la valeur ... » ou « X reçoit ... » ou « X ← ... ».

Types de variables

On dit qu'une variable est :

- de type entier si la valeur qu'elle contient est un nombre entier
- de type flottant si la valeur qu'elle contient est un nombre à virgule
- de type chaîne de caractères si la valeur qu'elle contient est une suite de caractères
- de type booléen si la valeur qu'elle contient est « Vrai » ou « Faux »

Programmer en Python

Programmer un algorithme, c'est le traduire dans un langage compréhensible par un ordinateur. Nous utiliserons le langage de programmation Python.

Correspondance entre le langage naturel et Python

Langage naturel

X ← 2
Afficher X
Saisir un nombre X de type entier
Saisir un nombre X de type flottant
Saisir un nombre X de type chaîne de caractères

Python

```
X = 2
print(X)
X = int(input())
X = float(input())
X = str(input())
```

Opérations en Python

Langage naturel	Python
Ajouter a et b	`a + b`
Soustraire b de a	`a - b`
Multiplier a par b	`a * b`
Diviser a par b	`a/b`
Calculer le quotient entier de a par a	`a//b`
Calculer le reste de la division de a par b	`a%b`
Elever a à la puissance n	`a**n`
Calculer 4×10^3	`4e3`

Importer un module

Pour utiliser d'autres opérations mathématiques, on importe des modules contenant des fonctions supplémentaires comme le module `math` qui contient la fonction racine carrée `sqrt`.

Python

```
import math
a = 36
a = math.sqrt(2)
print(a)
```

Instruction conditionnelle

Une instruction conditionnelle est un type d'instruction qui permet d'exécuter une instruction ou une autre en fonction d'une certaine condition.

Si *Condition* alors
  Instruction 1
Sinon
  Instruction 2

L'instruction conditionnelle en Python

Python
```
if condition:
    Instruction 1
else:
    Instruction 2
```

Tester une condition en Python

Langage naturel

Si X = 3 alors
Si X $\leqslant$ 3 alors
Si X = 1 ou X >5 alors
Si X $\geqslant$ 10 et X < 30 alors
Si X est différent de 5 alors
Si X est un multiple de 3 alors

Python
```
if X == 3 :
if X <= 3 :
if X = = 1 or X > 5 :
if X >= 10 and X < 30 :
if X != 5 :
if X%3 == 0 :
```

Boucle bornée

Une boucle bornée (ou boucle « pour ») est un type de boucle qui permet de répéter un bloc d'instructions un certain nombre de fois défini à l'avance.

Langage naturel	Python

Pour K allant de X à Y
│ *Instructions*
Fin Pour
	`for k in range(x,y+1):`
	`    Instructions`
	`    ...`

Boucle non bornée

Une boucle non bornée (ou boucle « tant que ») est un type de boucle qui permet de répéter un bloc d'instructions tant qu'une certaine condition est vérifiée.

Langage naturel	Python

Tant que *Condition*
│ *Instructions*
Fin Tant que
	`while condition:`
	`    Instructions`
	`...`

Fonction à un ou plusieurs arguments

Une fonction est un bloc d'instructions à qui on a donné un nom. Une fonction reçoit des arguments en entrée et renvoie un résultat.
Le bloc d'instructions d'une fonction n'est exécuté que si la fonction est appelée.

Python
```
def fonction(argument1, argument2, ...):
    Instructions
    return resultat
```

Pour exécuter une fonction, on utilise l'instruction suivante :

Python
```
fonction(argument1, argument2, ...)
```

Fonction renvoyant un nombre aléatoire

Pour générer un nombre aléatoire en Python, on utilise la bibliothèque `random`. L'instruction `random.randint(a,b)` donne un nombre entier aléatoire entre a et b et l'instruction `random.random()` donne un nombre flottant aléatoire entre 0 et 1.