Multiples et diviseurs

Exercice 1

1. Donner tous les diviseurs positifs de 10.
2. Donner tous les diviseurs positifs de 21.
3. Donner tous les diviseurs positifs de 11.

Exercice 2

1. Déterminer les multiples de 9 inférieurs à 50.
2. Déterminer les multiples de 12 compris entre 20 et 40.

Exercice 3

1. Donner cinq multiples de 11.
2. Donner cinq diviseurs de 24.

Exercice 4

1. Justifier que 98 est un multiple de 14.
2. Traduire cette propriété avec chacune des expressions :
   (a) « est diviseur de » (b) « a pour diviseur » (c) « est divisible par » (d) « a pour multiple »

Exercice 5

Recopier et compléter les phrases suivantes en remplaçant les pointillés par « diviseur » ou « multiple » :

1. 350 est un .... de 50.
2. 13 est un .... de 260.
3. 0 est un .... de 89.
4. 1 est un .... de 16.
5. 42 est un .... de 42.

Exercice 6

Un terrain rectangulaire a des côtés entiers et une aire égale à 50m^2.

1. Donner la liste des diviseurs positifs de 50.
2. En déduire les longueurs possibles des côtés de ce terrain.

Exercice 7

Existe-t-il un entier qui soit un multiple de 14 et un diviseur de 100 ?

Exercice 8

Comment peut-on écrire un entier multiple de 5 ? Un entier multiple de 9 ?

Exercice 9

On sait que 6 est un diviseur des nombres a et b.

1. Comment peut-on écrire les nombres a et b ?
2. Montrer que 6 est aussi un diviseur de $a - b$.
3. Montrer que $a \times b$ est divisible par 18.

Exercice 10

Voici un programme écrit en langage Python :

```
a = int(input("Entrer un nombre a: "))
b = int(input("Entrer un nombre b: "))
m = 0
while m <= b:
    m = m + a
print(m-a)
```

1. Que va afficher ce programme si on saisit en entrée `a = 7` et `b = 50` ?
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 11

Dans le langage Python, si `n` et `k` sont deux variables de type nombre entier alors l'expression `n%k` désigne le reste de la division euclidienne de `n` par `k`. Par exemple, `10%3` vaut `1` et `12%4` vaut `0`.

1. Que peut-on dire des nombres `n` et `k` lorsque le nombre `n%k` vaut 0 ?

On donne le programme suivant :

```
n = int(input("Entrer un entier n: "))
for k in ............ :
    if ............ :
        print(............)
```

2. Compléter ce programme pour qu'il affiche la liste de tous les diviseurs positifs de `n`.

Exercice 12

Ecrire un programme en langage Python qui affiche le nombre de diviseurs d'un entier n.

Nombres pairs et impairs

Exercice 13

Montrer que si n est un nombre impair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 14

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier à chaque fois.

1. La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
2. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre pair.
3. La somme de deux entiers consécutifs est un nombre impair.
4. Le produit de deux nombres impairs est un nombre pair.

Exercice 15

Démontrer que si a est un nombre entier alors $a^2 - a$ est un nombre pair. On distinguera deux cas selon que a est un nombre pair et selon que c'est un nombre impair.

Nombres premiers

Exercice 16

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier la réponse.

a) 7

b) 34

c) 57

d) 77

e) 13

Exercice 17

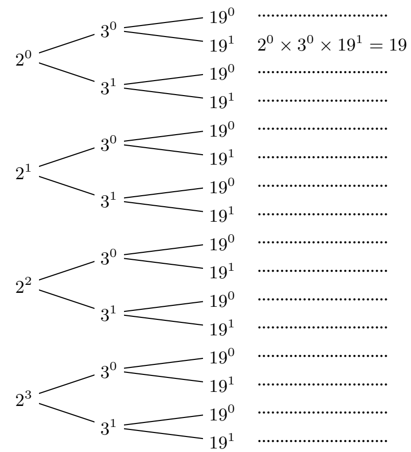
Décomposer les nombres suivants en un produit de nombres premiers :

a) 35 b) 42 c) 50 d) 99 e) 100

Exercice 18

On considère le nombre $n = 456$.

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de n.
2. On note k un diviseur positif de n.
   (a) Expliquer pourquoi les seuls diviseurs premiers de k ne peuvent être que 2, 3 et 19.
   (b) La décomposition en produit de facteurs premiers de k est donc de la forme $k = 2^a \times 3^b \times 19^c$ avec a, b et c appartenant à $\mathbb{N}$. Quelles sont les valeurs possibles de a, b et c ?
3. Recopier et compléter l'arbre suivant. En déduire la liste des diviseurs positifs de n.



Fractions irréductibles

Exercice 19

Simplifier au maximum chacune des fractions suivantes :

1. $\dfrac{48}{56}$ 2. $\dfrac{56}{63}$ 3. $\dfrac{63}{48}$ 4. $\dfrac{650}{800}$

Exercice 20

1. Décomposer 2261 et 323 en produit de nombres premiers.
2. Simplifier la fraction $\dfrac{2261}{323}$.
3. Calculer $\dfrac{2261}{323}+\dfrac{7}{49}$.

Exercice 21

1. Supposons que $1+\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Comment peut-il s'écrire ? Comment s'écrirait alors $\sqrt{2}$? Est-ce possible ? Qu'en déduit-on ?
2. Quel est le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel appartient :
   (a) $3\times\sqrt{2}$
   (b) $\sqrt{2}-1$
   (c) $2\left(\sqrt{2}\right)^2+4$

Exercice 22

1. Rappeler la définition d'un nombre décimal.
2. On considère la fraction irréductible $\dfrac{41}{40}$.
   (a) Décomposer le dénominateur en facteurs premiers. Qu'obtient-on en le multipliant par 5^2 ?
   (b) Déterminer alors l'entier a tel que $\dfrac{41}{40}=\dfrac{a}{10^3}$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la nature du nombre $\dfrac{41}{40}$?
3. On considère la fraction irréductible $\dfrac{11}{1250}$.
   (a) Décomposer 1250 en produit de facteurs premiers. Qu'obtient-on en le multipliant par 2^3 ?
   (b) Déterminer a et n entiers tels que $\dfrac{11}{1250}=\dfrac{a}{10^n}$.
   (c) Que peut-on en déduire sur le nombre $\dfrac{11}{1250}$?
4. De la même façon, montrer que $\dfrac{19}{80}$ et $\dfrac{7}{2500}$ sont des nombres décimaux.

Problèmes

Exercice 23

Un astronome a observé un corps céleste A et 24 jours plus tard un corps céleste B. Le corps A a une période de révolution de 180 jours et le corps B une période de 186 jours. Il se demande s'il pourra les observer tous les deux le même jour.
On note m le nombre de révolutions de A et n le nombre de révolutions de B avant de pouvoir les observer tous les deux le même jour pour la première fois.

1. Expliquer pour quoi m et n doivent vérifier l'égalité $-4+30m=31n$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour obtenir la valeur de m. Expliquer.

```
m ← 1
Tant que - 4 + 30*m ...
| m ← m + 1
Fin Tant que
```

3. Implémenter cet algorithme en Python et déterminer combien de révolutions devront faire chacun des deux corps célestes avant d'être observables le même jour pour la première fois.

Exercice 24

Deux carrés ont des côtés qui sont des nombres entiers. On sait que l'aire d'un des carrés est plus grande de 35cm^2 que l'aire de l'autre. Quels sont les valeurs possibles des longueurs des côtés de ces carrés ?

Exercice 25

L'escalier d'une tour a un nombre de marches compris entre 130 et 150. Si on les monte trois par trois, on arrive en haut. Si on les monte quatre par quatre, on finit par 1 marche. Combien y a-t-il de marches dans cet escalier ?

Exercice 26

Le crible d'Ératosthène est un algorithme permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre entier donné. Dans cet exercice, il s'agit de trouver tous les nombres premiers inférieurs à 100.

1. Justifier que le nombre 1 n'est pas premier puis le rayer sur la grille ci-dessous.
2. Entourer le plus petit nombre premier que vous connaissez.
   (a) Expliquer pourquoi tous les nombres pairs différent de 2 ne sont pas des nombres premiers.
   (b) Rayer tous les multiples de 2 puis entourer le plus petit nombre qui n'a pas été rayé.
3. De même, rayer tous les multiples de 3 (excepté le nombre entouré) puis entourer le plus petit nombre qui n'a pas été rayé.
4. Est-il nécessaire de rayer les multiples de 4 ? Pourquoi ?
5. Quel est le plus petit entier restant ? L'entourer puis rayer tous ses multiples.
6. Réitérer la procédure jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucun nombre qui ne soit ni rayé, ni entouré. En déduire la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100