CHAPITRE 20

Arithmétique

I Multiples et diviseurs

1. Notion de multiples et diviseurs

Définition I.1

Soit a et b deux nombres entiers. S'il existe un entier k tel que $a = b \times k$ alors on dit que :

- a est un **multiple** de b
- b est un **diviseur** de a

Remarque — On dit aussi que b divise a.

Exemple I.1 —

1. Donner la liste des cinq premiers multiples positifs de 7.
2. Donner la liste des diviseurs positifs de 12. → À rédiger

Exemple I.2 — Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :
a) 45 est un multiple de 5 b) 7 est un diviseur de 23 c) 6 divise 36 → À rédiger

Proposition I.2

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration. → À rédiger

Proposition I.3

Soit a un nombre entier. La somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a.

Démonstration. (dans le cas $a = 7$) → À rédiger

2. Nombres pairs et impairs

Définition I.4

- On dit qu'un nombre n est **pair** s'il est divisible par 2 c'est-à-dire s'il est de la forme $n = 2 \times k$ avec k entier.
- On dit qu'un nombre n est **impair** s'il n'est pas divisible par 2 c'est-à-dire s'il est de la forme $n = 2 \times k + 1$.

Proposition I.5

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration. → À rédiger

II Nombres premiers

Définition II.1

Un **nombre premier** est un nombre qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple II.1 — Montrer que les nombres 2, 3 et 5 sont premiers mais que 8 ne l'est pas. → À rédiger

Théorème II.2

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de puissances de nombres premiers de manière unique (à l'ordre près).

Exemple II.2 — Décomposer les nombres 84 et 1080 en un produit de puissances de nombres premiers. → À rédiger

III Simplification de fractions

Définition III.1

On dit qu'une fraction est **irréductible** si son numérateur et son dénominateur n'ont qu'un seul diviseur positif en commun, à savoir 1.

Proposition III.2

Pour simplifier une fraction qui n'est pas irréductible, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par un diviseur en commun.

Exemple III.1 — Écrire sous forme irréductible les fractions suivantes :

1. $\dfrac{48}{56}$ 2. $\dfrac{252}{70}$ → À rédiger

Exemple III.2 — Décomposer 800 et 650 en un produit de facteurs premiers puis simplifier la fraction $\dfrac{650}{800}$. → À rédiger

Proposition III.3

Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. → À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. 0, 7, 14, 21, 28.
2. 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Exemple I.2

a) Vrai car $45 = 5 \times 9$

b) Faux car $23 = 7 \times 3 + 1$

c) Vrai car $36 = 6 \times 6$

Démonstration de la proposition I.2
On fait un raisonnement par l'absurde : supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal. On aurait donc $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$. En faisant un produit en croix, on aurait alors $10^k = 3a$ ce qui voudrait dire que 10^k est un multiple de 3.
Or, 10^k est composé d'un 1 suivi de 0 donc la somme de ses chiffres est $1 + 0 + 0 + \ldots = 1$ donc il ne peut pas être divisible par 3. Cette contradiction montre $\frac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.

Démonstration de la proposition I.3
Soit m et n deux multiples de 7. Cela veut dire m et n sont de la forme $m = 7k$ et $n = 7k'$.
Ainsi, $m + n = 7k + 7k' = 7(k + k')$ donc $m + n$ est bien un multiple de 7 lui aussi.

Démonstration de la proposition I.5
Soit n un nombre impair. On sait alors que n est de la forme $n = 2k + 1$ donc
$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
Ainsi, n^2 est de la forme $2p+1$ donc c'est lui aussi un nombre impair.

Exemple II.1
Les diviseurs de 2 sont 1 et 2 donc 2 est premier.
Les diviseurs de 3 sont 1 et 3 donc 3 est premier.
Les diviseurs de 5 sont 1 et 5 donc 5 est premier.
Les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8 donc 8 n'est pas premier.

Exemple II.2
$84 = 2^2 \times 3 \times 7$
$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

Exemple II.1

1. $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$
2. $\frac{252}{70} = \frac{18}{5}$

Exemple III.2
$800 = 2^5 \times 5^2$ et $650 = 2 \times 5^2 \times 13$

$$\frac{800}{650} = \frac{2^5 \times 5^2}{2 \times 5^2 \times 13} = \frac{2^4}{13} = \frac{16}{13}$$

Démonstration de la proposition III.3
On raisonne par l'absurde : si $\sqrt{2}$ était un rationnel, il serait de la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.
On aurait donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$.
Cela signifie que p^2 est un nombre pair. On en déduit que p lui-même est un nombre pair (car s'il était impair, son carré serait impair). Autrement dit, $p = 2k$.
Ainsi, on aurait $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$.
De la même façon que précédemment, cela voudrait dire que q est un nombre pair.
Comme les nombres p et q seraient pairs, on pourrait donc simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, ce qui est contradictoire avec le fait que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut donc pas être un nombre rationnel.

Arithmétique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les définitions de diviseur et de multiple.
- Savoir montrer qu'un nombre divise un autre ou est multiple d'un autre.
- Connaître la définition d'un nombre pair ou impair.
- Connaître la définition d'un nombre premier.
- Savoir déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.
- Savoir simplifier une fraction.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
- Savoir montrer que la somme de deux multiples de 7 est aussi un multiple de 7.
- Savoir montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
- Savoir montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Arithmétique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les définitions de diviseur et de multiple.
- Savoir montrer qu'un nombre divise un autre ou est multiple d'un autre.
- Connaître la définition d'un nombre pair ou impair.
- Connaître la définition d'un nombre premier.
- Savoir déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.
- Savoir simplifier une fraction.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
- Savoir montrer que la somme de deux multiples de 7 est aussi un multiple de 7.
- Savoir montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
- Savoir montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Arithmétique

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les définitions de diviseur et de multiple.
- Savoir montrer qu'un nombre divise un autre ou est multiple d'un autre.
- Connaître la définition d'un nombre pair ou impair.
- Connaître la définition d'un nombre premier.
- Savoir déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.
- Savoir simplifier une fraction.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
- Savoir montrer que la somme de deux multiples de 7 est aussi un multiple de 7.
- Savoir montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
- Savoir montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.