CHAPITRE 18

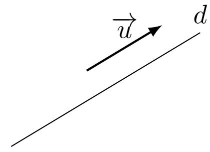
Équations de droites

I Équation cartésienne d'une droite

1. Vecteur directeur

Définition I.1

Soit d une droite.
On dit qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de d
si sa direction est celle de d.



Remarque —

- Si A et B sont deux points distincts d'une droite alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.
- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite.

2. Équation cartésienne

Théorème I.2

Soit $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ un repère et (d) une droite.
Il existe trois nombres réels a, b et c non tous nuls tels que la droite (d) soit l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$ax + by + c = 0$$

L'équation $ax + by + c = 0$ s'appelle une **équation cartésienne** de la droite (d).

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.1 — Tracer dans un repère la droite d dont une équation cartésienne est $3x - 4y + 6 = 0$. → À rédiger

Théorème I.3

L'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec a et b non tous nuls) est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple I.2 — Dans chaque cas, déterminer un vecteur directeur de la droite d dont une équation cartésienne est :

1. $3x + 7y - 2 = 0$
2. $-2x - 4y = 5$
3. $3x - 5 = 0$. → À rédiger

3. Déterminer une équation cartésienne d'une droite

Exemple I.3 — Déterminer une équation cartésienne de la droite d qui passe par le point $A(2; -3)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$. → À rédiger

Exemple I.4 — Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) qui passe par les points $A(-2; 1)$ et $B(3; -2)$. Le point $C(1; -1)$ appartient-il à cette droite ? → À rédiger

II Équation réduite d'une droite

Proposition II.1

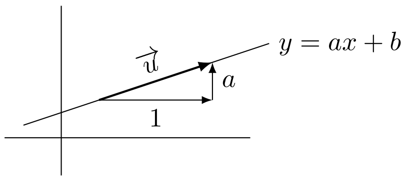
Si d est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une unique équation de la forme $y = ax + b$. Cette équation s'appelle l'**équation réduite** de la droite d.
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur ou la pente et le nombre b s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Exemple II.1 — Soit d une droite dont une équation cartésienne est $3x - 4y - 1 = 0$. Déterminer l'équation réduite de la droite d. → À rédiger

Exemple II.2 — 1. Déterminer l'équation réduite de la droite d qui passe par $A(-3, 4)$ et dont la pente vaut -2.
2. Calculer le coefficient directeur puis déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A(2, 2)$ et $B(4, 3)$. → À rédiger

Définition II.2

Si d est une droite d'équation réduite $y = ax + b$ alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.



III Parallélisme et intersection

1. Parallélisme

Proposition III.1

Soit d et d' deux droites qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées dont les équations réduites sont $d : y = ax + b$ et $d' : y = a'x + b'$.
- d et d' sont parallèles ou confondues si, et seulement si, $a = a'$
- d et d' sont strictement parallèles $\iff$ $a = a'$ et $b \neq b'$.

2. Intersection de deux droites

Proposition III.2

Soit d et d' deux droites qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées.
d et d' sont sécantes si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont différents.

Exemple III.1 — Montrer que les droites d et d' d'équations respectives $y = 2x - 4$ et $y = 3x - 5$ sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en résolvant un système d'équations. → À rédiger

IV Systèmes d'équations

Définition IV.1

Un système de deux équations à deux inconnues est constitué de deux égalités contenant chacune deux inconnues, souvent notées x et y. Une solution d'un système est donc constituée de deux nombres (une valeur pour x et une valeur pour y), tels que les égalités soient vérifiées.

Méthode — Pour résoudre un système d'équations, on peut combiner les lignes afin de faire disparaître une des inconnues.

Exemple IV.1 — Résoudre le système d'équation suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ → À rédiger

Exemple IV.2 — Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants ; il paie 5,60 euros. Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants ; il paie 4,20 euros. Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant. → À rédiger

Solutions

Démonstration du théorème I.2
Soit (d) une droite, soit $A(x_A, y_A)$ un point de cette droite et soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite.
Un point quelconque $M(x, y)$ appartient à cette droite si, et seulement si,
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires
$\iff (x-x_A)\times\beta-\alpha\times(y-y_A)=0$
$\iff \beta x-\alpha y-x_A\beta+\alpha y_A=0$
$\iff ax+by+c=0$ avec $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=-x_A\beta+\alpha y_A$.
De plus, comme $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur, il est non nul, donc α est non nul ou β est non nul donc a et b sont non tous nuls.

Exemple I.1
Si $x=2$ alors $3\times2-4y+6=0$ donc $y=\frac{12}{4}=3$
Si $y=0$ alors $3x-4\times0+6=0$ donc $x=\frac{-6}{3}=-2$
La droite d est la droite passant par les points $A(2;3)$ et $B(-2;0)$.

Démonstration du théorème I.3
Commençons par chercher un point de cet ensemble de point :

- Si $a\neq0$ alors le point $A(\frac{-c}{a};0)$ vérifie $ax_A+by_A+c=0$
- Si $a=0$ alors $b\neq0$ et le point $A(0;\frac{-c}{b})$ vérifie $ax_A+by_A+c=0$

Soit $M(x, y)$ un point.
$ax+by+c=0 \iff ax+by+c=ax_A+bx_A+c$
$\iff a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
$\iff$ dét $\left(\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\right)=0$
$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont colinéaires
$\iff$ M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$

Exemple I.2
On a :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

Exemple I.3
Comme $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$, on a $-b=-2$ et $a=7$ donc $b=2$ et $a=7$. Une équation de (d) est : $7x+2y+c=0$.
Or, $A(2;-3)\in d$ donc $7\times2+2\times(-3)+c=0$ donc $c=-8$. Une équation de la droite (d) est $7x+2y-8=0$.

Exemple I.4
Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ donc $-b=5$ c'est-à-dire $b=-5$ et $a=-3$.
Une équation de (d) est $-3x-5y+c=0$.
Or, $A\in(d)$ donc $-3\times(-2)-5\times1+c=0$ donc $c=-1$.
Une équation de (d) est donc $-3x-5y-1=0$.
C n'appartient pas à cette droite car $-3\times1-5\times(-1)-1\neq0$.

Exemple II.1
$y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

Exemple II.2

1. On sait qu'une équation est $y=-2x+b$. Or, $A\in d$ donc $4=-2\times(-3)+b$ d'où $b=-2$. L'équation réduite est $y=-2x-2$.
2. Le coefficient directeur est $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-2}{4-2}=0,5$. Ainsi, l'équation réduite de cette droite est $y=0,5x+b$. Or, $A\in(AB)$ donc $2=0,5\times2+b$ d'où $b=1$. L'équation réduite est $y=0,5x+1$.

Exemple III.1
Comme les coefficients directeurs sont différents, les droites sont sécantes.
$\begin{cases}y=2x-4(L1)\\y=3x-5(L2)\end{cases}\iff\begin{cases}y=2x-4\\0=x-1(L2-L1)\end{cases}$
On en déduit que $x=1$ et $y=2\times1-4=-2$ donc le point d'intersection est le point $(1;-2)$.

Exemple IV.1
On a :
$\begin{cases}3x-2y=5(L1)\\5x+3y=2(L2)\end{cases}\iff\begin{cases}3x-2y=5\\19x=19(3\times L1+2\times L2)\end{cases}$
On en déduit que $x=\frac{19}{19}=1$ et donc en remplaçant dans la ligne $L1$, on trouve $3\times1-2y=5$ d'où $y=-1$.
Ainsi, $S=\{(1;-1)\}$

Exemple IV.2
Soit x le prix d'un pain au chocolat et y le prix d'un croissant.
On a le système :
$\begin{cases}3x+2y=5,6\\x+3y=4,20\end{cases}$
En résolvant ce système, on trouve $x=1,2$ et $y=1$. Le prix d'un pain au chocolat est de 1,20€ et le prix d'un croissant est de 1€.

Équations de droites

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir ce qu'est un vecteur directeur d'une droite.
- Savoir tracer une droite à partir d'une équation cartésienne.
- Savoir déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de deux points.
- Savoir déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur.
- Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite à partir d'une équation cartésienne.
- Savoir déterminer une équation réduite d'une droite à partir d'un point et de la pente.
- Savoir déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes à partir de leurs équations.
- Savoir résoudre un système d'équations pour résoudre un problème ou pour trouver le point d'intersection de deux droites.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que si (d) est une droite alors (d) est l'ensemble des points tels que $ax+by+c=0$.
- Savoir montrer que l'ensemble des points tels que $ax+by+c=0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Équations de droites

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir ce qu'est un vecteur directeur d'une droite.
- Savoir tracer une droite à partir d'une équation cartésienne.
- Savoir déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir de deux points.
- Savoir déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur.
- Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite à partir d'une équation cartésienne.
- Savoir déterminer une équation réduite d'une droite à partir d'un point et de la pente.
- Savoir déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes à partir de leurs équations.
- Savoir résoudre un système d'équations pour résoudre un problème ou pour trouver le point d'intersection de deux droites.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que si (d) est une droite alors (d) est l'ensemble des points tels que $ax+by+c=0$.
- Savoir montrer que l'ensemble des points tels que $ax+by+c=0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.