CHAPITRE 17

Vecteurs (2ème partie)

I Produit d'un vecteur par un nombre réel

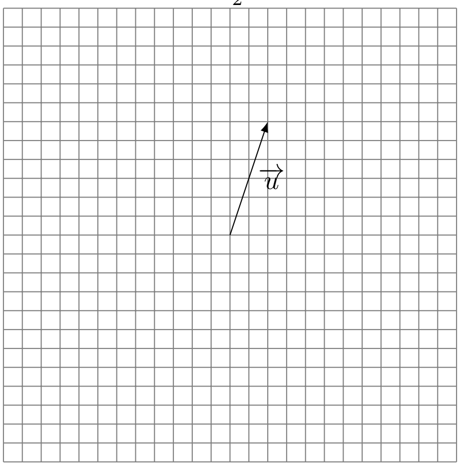
1. Multiplier un vecteur par un réel

Définition I.1

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Par définition, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur tel que :

1. $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$
2. $\begin{cases} k\overrightarrow{u} \text{ a le même sens que } \overrightarrow{u} \text{ si } k \geqslant 0 \\ k\overrightarrow{u} \text{ a un sens opposé à } \overrightarrow{u} \text{ si } k \leqslant 0 \end{cases}$
3. La norme de $k\overrightarrow{u}$ est $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$

Exemple I.1 — Tracer ci-dessous les vecteurs $3\overrightarrow{u}$, $-2\overrightarrow{u}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$. → À rédiger



2. Base orthonormée

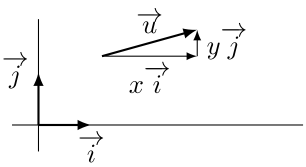
Définition I.2

On dit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une **base orthonormée** si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs dont les directions sont perpendiculaires et dont la norme vaut 1. On dit alors que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un **repère orthonormé**.

Proposition I.3

Dans une base orthonormée, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

On dit alors que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$.



Proposition I.4

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé. Soit k un réel et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \end{pmatrix}$.

Exemple I.2 — Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(-1; 2)$ et $B(3; 1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $-2\overrightarrow{AB}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ puis les représenter dans un repère en partant du point O. → À rédiger

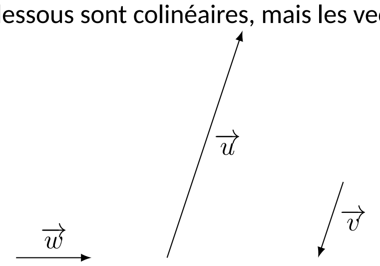
II Colinéarité de vecteurs

Définition II.1

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Remarque — Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Exemple II.1 — Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous sont colinéaires, mais les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne le sont pas.



Remarque — Si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires, mais la réciproque est fausse. Deux vecteurs colinéaires ne sont pas forcément égaux.

Proposition II.2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Définition II.3

Dans un repère $(O; I; J)$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre dét$(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Exemple II.2 — Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\longrightarrow$ À rédiger

Théorème II.4

Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Démonstration. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple II.3 — Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$. Montrer que ces vecteurs sont colinéaires puis déterminer un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. $\longrightarrow$ À rédiger

III Applications de la colinéarité

Proposition III.1

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

$$(AB)//(CD) \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires}$$

Proposition III.2

Soit A, B, C trois points du plan.

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

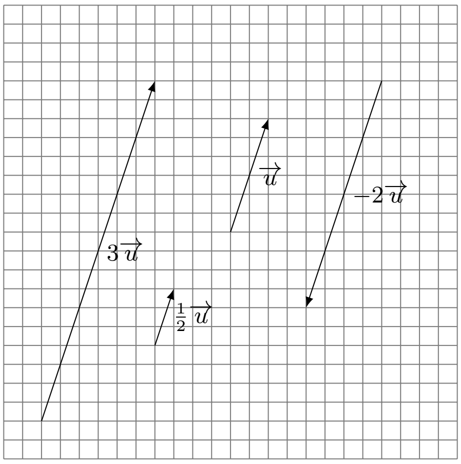
Proposition III.3

Soit A, B, I trois points du plan.

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Solutions

Exemple I.1
On a les vecteurs suivants :



Exemple I.2
$\overrightarrow{AB}\,(4;-1)$

$-2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

Exemple II.3
$x=3, y=-2, x'=6$ et $y'=-4$.
dét$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy'-x'y = 3\times(-4)-6\times(-2) = -12-(-12)=0$

Démonstration du théorème II.4
Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$

$\iff \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\iff x'=kx$ et $y'=ky$

$\iff$

x	y
x'	y'

est un tableau de proportionnalité

$\iff xy'=x'y$

$\iff xy'-x'y=0$

Exemple II.3
Le déterminant est $\frac{2}{7}\times 2-\frac{4}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{4}{7}-\frac{12}{21}=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}=0$ donc les vecteurs sont colinéaires.
Le nombre k tel que $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$ est $k=\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{6}{4}=1,5$

Vecteurs (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir tracer graphiquement le produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir ce qu'est une base orthonormée.
- Connaître la définition de deux vecteurs colinéaires.
- Savoir calculer le déterminant de deux vecteurs.
- Savoir démontrer que deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant.
- Savoir montrer que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles en montrant que des vecteurs sont colinéaires.

Démonstration à connaître.

- Savoir montrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Vecteurs (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir tracer graphiquement le produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir ce qu'est une base orthonormée.
- Connaître la définition de deux vecteurs colinéaires.
- Savoir calculer le déterminant de deux vecteurs.
- Savoir démontrer que deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant.
- Savoir montrer que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles en montrant que des vecteurs sont colinéaires.

Démonstration à connaître.

- Savoir montrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Vecteurs (2ème partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir tracer graphiquement le produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Savoir ce qu'est une base orthonormée.
- Connaître la définition de deux vecteurs colinéaires.
- Savoir calculer le déterminant de deux vecteurs.
- Savoir démontrer que deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant.
- Savoir montrer que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles en montrant que des vecteurs sont colinéaires.

Démonstration à connaître.

- Savoir montrer que deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.