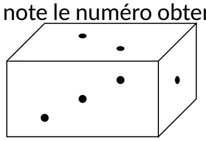
Modéliser le hasard

Exercice 1
Pour chaque expérience aléatoire, déterminer son univers E puis choisir une loi de probabilité sur E qui modélise cette expérience aléatoire.

1. On lance une dé cubique bien équilibrée dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le numéro obtenu.
2. On tire une bille d'une urne opaque contenant 10 billes identiques numérotées de 1 à 10 et on note le numéro obtenu.

Exercice 2
Les faces d'un dé parallélépipédique ci-dessous sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé et on note le numéro obtenu sur la face du dessus.



Après avoir répété 10 000 fois cette expérience aléatoire, on a obtenu cette distribution des fréquences :

Numéro	1	2	3	4	5	6	Total
Fréquence	0,099	0,207	0,198	0,201	0,194	0,101	1

Parmi les modèles ci-dessous, lequel semble convenir pour modéliser cette expérience aléatoire ?

Modèle 1 : Loi d'équiprobabilité sur $E = \{1; 2; 3\}$

Modèle 2 : Loi d'équiprobabilité sur $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Modèle 3 : Loi de probabilité suivante :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Fréquence	1/10	1/5	1/5	1/5	1/5	1/10

Exercice 3
Imaginer des expériences aléatoires pouvant être modélisées par les lois de probabilité suivantes :

1.

Issue	Noire	Bleue	Rouge	Jaune
Probabilité	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

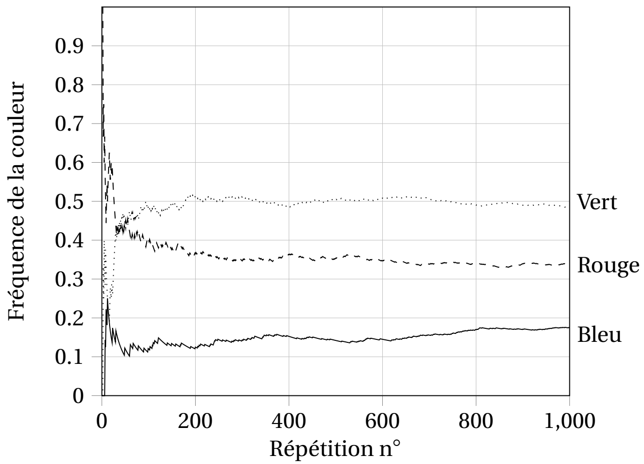
2.

Issue	Vert	Rouge	Orange
Probabilité	$0,6$	$0,35$	$0,05$

3.

Issue	Chemise	Tee-shirt	Polo
Probabilité	$0,35$	$0,5$	$0,15$

Exercice 4
Dans une urne, il y a des boules rouges, des boules bleues et des boules vertes indiscernables au toucher. On réalise 1000 fois l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans l'urne, noter sa couleur et la remettre dans l'urne. L'évolution des fréquences des boules obtenues de chaque couleur au fil de ces 1000 répétitions est donnée ci-dessous :



1. Proposer une modélisation de l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard une boule de l'urne.
2. On a réalisé une autre série de 1000 tirages et on a obtenu :

Couleur	Rouge	Vert	Bleu
Nombre de boules tirées	330	510	160

   (a) Proposer une autre modélisation de l'expérience aléatoire.
   (b) Quel phénomène ces deux séries de 1000 tirages illustrent-elles ?

Vocabulaire des événements

Exercice 5
On dispose de quatre cartons sur lesquels on a noté les lettres M, A, T et H. On forme un « mot » de deux lettres en choisissant au hasard successivement et sans remise deux cartons. Ici « mot » désigne tout assemblage ayant un sens ou non, par exemple « TH » est un mot.

1. Déterminer l'univers de cet expérience aléatoire c'est-à-dire l'ensemble de tous les mots possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
2. Ecrire sous forme d'ensembles les événements suivants :
   E_1 : « le mot contient la lettre M »
   E_2 : « le mot contient la lettre A »
3. On considère l'événement « le mot contient la lettre M ou la lettre A ». Décrire cet événement à l'aide de E_1 et E_2, puis l'écrire sous la forme d'un ensemble.
4. Reprendre la question 3. avec l'événement « le mot contient la lettre M et la lettre A ».

Exercice 6
Une urne contient une boule rouge (R), trois boules vertes (V) et cinq boules bleues (B). On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Le résultat d'un tirage est un couple. Par exemple, si on tire une boule verte au 1er tirage et une boule bleue au 2ème tirage, on notera cela par le couple (V ; B).

1. Déterminer l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire (on pourra faire un arbre).
2. On considère les événements suivants :
   A : « la 1ère boule tirée est bleue »
   D : « la 2ème boule tirée est verte »
   C : « les boules tirées ont la même couleur »
   (a) Ecrire sous forme d'ensembles les événements A, D et C.
   (b) Décrire par une phrase l'événement contraire de A, puis l'écrire sous forme d'ensemble.
   (c) Décrire par une phrase l'événement A ∪ D, puis l'écrire sous forme d'ensemble.
   (d) Décrire par une phrase l'événement A ∩ D, puis l'écrire sous forme d'ensemble.
   (e) Décrire par une phrase l'événement contraire de C , puis l'écrire sous forme d'ensemble.

Calcul de probabilités

Exercice 7
Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. De plus, 8 étudient les deux langues. Pour un élève donné, on note A l'événement : « l'élève étudie l'anglais » et E l'événement : « l'élève étudie l'espagnol ». On choisit un élève au hasard dans la classe.

1. Que représente l'événement A ∩ E ? Donner sa probabilité.
2. Que représente l'événement A ∪ E ? Donner sa probabilité.
3. Quelle est la probabilité que l'élève choisi n'apprenne ni l'anglais ni l'espagnol ?
4. Quel est l'événement contraire de A ? Calculer sa probabilité.

Exercice 8
On lance simultanément deux dés cubiques bien équilibrés, dé 1 et dé 2. L'issue d'un lancer est donc un couple (x ; y) où x est la valeur affichée sur le dé 1 et y est la valeur affichée sur le dé 2.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles à cette expérience aléatoire ?
2. Recopier et compléter le tableau suivant, donnant le plus grand des deux nombres obtenus lors du lancer :

dé 2 / dé 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3. Déterminer la probabilité des événements suivants :

   A : « le plus grand des deux nombres obtenus est 4 »

   B : « le plus grand des deux nombres obtenus est au plus 3 »

   C : « le plus grand des deux nombres obtenus est au moins 5 ».

   D : « Le plus grand des deux nombres est un multiple de 2 ou de 3».

Exercice 9

Une étudiante fabrique chaque semaine un petit stock de bijoux fantaisie qu'elle vend en fin de semaine afin de s'assurer quelques revenus. Sa production hebdomadaire de bijoux se répartit comme suit : 20% de boucles d'oreilles, 40% de colliers et 40% de bracelets. Chaque bijou est réalisé soit en métal argenté, soit en métal doré. 60% des bijoux fabriqués sont argentés. Elle fabrique autant de colliers argentés que de colliers dorés. 75% des bracelets sont argentés.

1. Reproduire et compléter le tableau de fréquences (en %) par rapport à l'ensemble de la production suivant :

	Colliers	Bracelets	Boucles d'oreilles	Total
Argentés				60
Dorés				
Total			20	100

2. Pour se rendre sur le lieu de vente, elle range en général sa production en vrac dans une mallette. Elle prend au hasard un bijou dans la mallette. On suppose que tous les choix possibles sont équiprobables.
   (a) Calculer les probabilités des événements suivants :

   A : « le bijou pris est argenté »

   B : « le bijou pris est un bracelet »

   (b) Décrire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

   (c) Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer sa probabilité.

   (d) Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer sa probabilité.

3. Il lui arrive parfois de ranger séparément les bijoux argentés et les bijoux dorés. C'est le cas cette fois-ci. Elle prend, toujours au hasard, un objet dans la mallette contenant les bijoux dorés.
   (a) Quelle est la probabilité p_1 que le bijou pris soit un bracelet ?

   (b) Quelle est la probabilité p_2 que le bijou pris ne soit pas un collier ?

Exercice 10

Le code d'un antivol de vélo est un nombre de trois chiffres, où chaque chiffre peut être 0, 1, 2 ou 3. Zoé choisit un code au hasard.

1. Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre et en déduire le nombre de codes possibles.
2. Quelle est la probabilité que le code de Zoé comporte 3 chiffres distincts ?

Exercice 11

Une puce se déplace sur un axe gradué. A chaque pas, de façon aléatoire, elle avance ou recule d'une unité. Elle part de l'origine O et effectue un total de quatre sauts.

1. (a) Quelles sont les abscisses possibles de la puce à la fin des quatre sauts ?

   (b) Pour chaque affirmation, conjecturer si elle est vraie ou fausse :

   Affirmation 1 : « Il existe une position finale plus probable que les autres. »

   Affirmation 2 : « La puce se trouve à la fin en O avec une probabilité de 0,5. »

   Affirmation 3 : « La puce a autant de chances d'avoir à la fin une abscisse positive qu'une abscisse négative. »

On propose l'algorithme suivant pour simuler le premier saut de la puce :

```
X ← 0
N ← Entier aléatoire valant soit 0, soit 1
Si N = 0
│ X ← X - 1
Sinon
│ X ← X + 1
```

2. (a) Expliquer le rôle des variables X et N dans cet algorithme.

   (b) Modifier cet algorithme pour simuler les quatre sauts de la puce.

   (c) Traduire cet algorithme en langage Python puis l'exécuter.

3. Construire un arbre décrivant tous les sauts possibles puis calculer la probabilité de chaque abscisse finale possible. Comparer avec les résultats de la question 1.(b).