CHAPITRE 16

Probabilités

I Modélisation d'une expérience aléatoire

1. Vocabulaire

Définition I.1

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dans laquelle intervient le hasard.
- Une **issue** est un des résultats possibles de cette expérience.
- L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles.

Exemple I.1 — Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. De plus, cinq de ces boules sont rouges, trois sont bleues et les autres sont vertes. On tire au hasard une boule de l'urne. Décrire l'univers de cette expérience lorsque :
1. on s'intéresse au numéro de la boule. 2. on s'intéresse à la couleur de la boule. $\longrightarrow$ À rédiger

2. Loi de probabilité

Définition I.2

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.
Définir une **loi de probabilité** sur Ω, c'est attribuer à chacune des issues x_i un nombre $p_i \in [0;1]$ qu'on appelle **probabilité** de telle sorte que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exemple I.2 — Donner la loi de probabilité de l'expérience qui consiste à lancer une pièce bien équilibrée. $\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.3 — Trois coureurs A, B et C s'affrontent sur une épreuve de 400m. On sait que A et B ont autant de chances de finir premier. De plus, C a trois fois plus de chances que A de finir vainqueur. Déterminer la loi de probabilité associée à cette épreuve. $\longrightarrow$ À rédiger

Définition I.3

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'**équiprobabilité**.
Dans ce cas, s'il y a n issues, chacune d'elle a pour probabilité $\dfrac{1}{n}$.

Exemple I.4 — Quelle est la loi de probabilité de l'expérience qui consiste à lancer un dé à 6 faces bien équilibré ? $\longrightarrow$ À rédiger

3. Modéliser une expérience aléatoire

Définition I.4

Choisir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Théorème I.5

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de choisir cette valeur comme probabilité de l'issue.

Exemple I.5 — On donne l'algorithme suivant pour simuler le résultat du lancer de deux dés :

Python
```python
import random
de1 = random.randint(1,6)
de2 = random.randint(1,6)
somme = de1 + de2
print(somme)
```

1. Modifier cet algorithme pour qu'il simule 100 lancers puis l'exécuter.
2. Proposer un modèle de probabilité de l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés et à considérer leur somme.

$\longrightarrow$ À rédiger

II Vocabulaire des événements

1. Notion d'événement

Définition II.1

Un **événement** A est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble d'issues. Un événement qui ne contient qu'une seule issue s'appelle **événement élémentaire**.

Exemple II.1 — On lance un dé bien équilibré une fois. On note Ω l'univers et A l'événement "Obtenir un nombre pair".
Ainsi, $\Omega =$ .... $A =$ ....
L'événement B : « Obtenir un 6 » est un événement ....

Exemple II.2 — Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard deux boules successivement sans remettre la première boule dans l'urne.

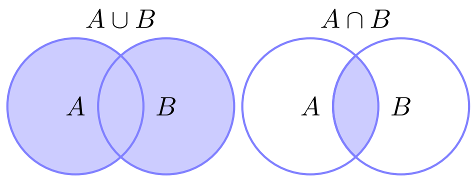
1. A l'aide d'un arbre, décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
2. On note A l'événement « Obtenir deux boules portant des numéros pairs ». Déterminer A. $\rightarrow$ À rédiger

2. Union et intersection d'événements

Définition II.2

Si A et B sont deux événements alors :

- la réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des issues qui sont dans A *ou* dans B.
- l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des issues qui sont dans A *et* dans B.



Exemple II.3 — On lance une fois un dé. On note A l'événement « Obtenir un nombre pair », B l'événement « Obtenir un nombre impair » et C l'événement « Obtenir un multiple de 3 ».
$A =$ .... $B =$ .... $C =$ ....
$A \cup C$ est l'événement « .... »
$A \cup C =$ ....
$B \cap C$ est l'événement « .... »
$B \cap C =$ ....

3. Evénements incompatibles

Définition II.3

Deux événements qui n'ont aucune issue en commun sont dits **incompatibles** ou disjoints.

Exemple II.4 — On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Les événements « tirer un Roi » et « tirer un 7 » sont ....
Par contre, les événements « tirer un Roi » et « tirer une carte de Coeur » ne sont pas ....
car ils ont en commun l'issue ....

4. Événements contraires

Définition II.4

Si A est un événement, l'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$ est l'événement constitué de toutes les issues qui ne sont pas dans A.

Exemple II.5 — On lance un dé. Soit A l'événement « Obtenir un multiple de 3 ».
$A =$ ....
$\overline{A} =$ ....

Remarque — Deux événements contraires sont toujours incompatibles.

III Calcul de probabilités

1. Probabilité d'un événement

Définition III.1

Si A est un événement alors la **probabilité** de A, qu'on note $P(A)$, est la somme des probabilités de toutes les issues qui composent cet événement.

Exemple III.1 — On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4 et on effectue la somme des valeurs obtenues.

1. A l'aide d'un tableau, déterminer toutes les issues possibles puis déterminer la loi de probabilité de cette expérience.
2. On note A l'événement « la somme obtenue est inférieure ou égale à 4 ». Calculer $P(A)$. $\rightarrow$ À rédiger

Proposition III.2

Lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre d'issues de } \Omega}$$

Exemple III.2 — On lancé un dé. On note A : « Obtenir un multiple de 3 ». Calculer la probabilité de A. $\rightarrow$ À rédiger

2. Probabilité de l'union de deux événements

Proposition III.3

Pour tous événements A et B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple III.3 — On considère un jeu de 32 cartes. A est l'événement « Tirer une carte de Pique » et B est l'événement « Tirer un Valet ».
$P(A) =$ ....
$P(B) =$ ....
$P(A \cap B) =$ ....car ....
On en déduit que la probabilité de tirer une carte de Pique ou un Valet est :
....

3. Probabilité de l'événement contraire

Proposition III.4

Pour tout événement A,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Exemple III.4 — Dans un jeu de 32 cartes, A est l'événement « tirer un Trèfle ».
$\overline{A}$ est l'événement : « tirer un Pique, un Coeur ou un Carreau ».
$P(A) =$ ....
donc
$P(\overline{A}) =$ ....

4. Utilisation d'un arbre

Exemple III.5 — On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note P l'événement « Obtenir Pile » et on note F l'événement « Obtenir Face ».

1. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre puis décrire l'univers de cette expérience.
2. On note A l'événement « Faire exactement un seul Pile ». Calculer $P(A)$.
3. On note B l'événement « Faire au moins une Face ». Calculer $P(B)$.
4. Déterminer la probabilité de $A \cap B$.
5. En déduire la probabilité de faire exactement un Pile ou au moins une Face. $\rightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1

1. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
2. $\Omega = \{\text{rouge; bleu; vert}\}$

Exemple I.2

La loi de probabilité est la suivante :

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemple I.3

La loi de probabilité est la suivante :

Issue	A	B	C
Probabilité	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Exemple I.4

Il s'agit de la loi de probabilité suivante :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple I.5

Voici l'algorithme modifié :

Python

```
import random

for k in range(100):
    de1 = random.randint(1,6)
    de2 = random.randint(1,6)
    somme = de1 + de2
    print(somme)
```

On peut proposer le modèle suivant :

Issue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple II.1

On lance un dé bien équilibré une fois. On note Ω l'univers et A l'événement "Obtenir un nombre pair". Ainsi, $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{2; 4; 6\}$

L'événement B : « Obtenir un 6 » est un événement élémentaire.

Exemple II.2

1. $\Omega = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3)\}$
2. $A = \{(2; 4); (4; 2)\}$

Exemple II.3

On lance une fois un dé. On note A l'événement « Obtenir un nombre pair », B l'événement « Obtenir un nombre impair » et C l'événement « Obtenir un multiple de 3 ».

$A = \{2; 4; 6\}$ $B = \{1; 3; 5\}$ $C = \{3; 6\}$

$A \cup C$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 »

$A \cup C = \{2; 3; 4; 6\}$

$B \cap C$ est l'événement « Obtenir un nombre impair et un multiple de 3 »

$B \cap C = \{3\}$

Exemple II.4

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Les événements « tirer un Roi » et « tirer un 7 » sont incompatibles.

Par contre, les événements « tirer un Roi » et « tirer une carte de Coeur » ne sont pas incompatibles car ils ont en commun l'issue « Roi de Coeur »

Exemple II.5

$A = \{3; 6\}$ et $\overline{A} = \{1; 2; 4; 5\}$

Exemple III.1

1. La loi de probabilité est la suivante :

Issue	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $P(A) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16}$

Exemple III.2

$P(A) = \frac{2}{6}$

Exemple III.3

On considère un jeu de 32 cartes. A est l'événement « Tirer une carte de Pique » et B est l'événement « Tirer un Valet ».

$P(A) = \frac{8}{32}$

$P(B) = \frac{4}{32}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ car $A \cap B = \{\text{Valet de Pique}\}$

On en déduit que la probabilité de tirer une carte de Pique ou un Valet est : $\frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Exemple III.4

Dans un jeu de 32 cartes, A est l'événement « tirer un Trèfle ».

$\overline{A}$ est l'événement : « tirer un Pique, un Coeur ou un Carreau ».

$P(A) = \frac{8}{32}$ donc $P(\overline{A}) = 1 - \frac{8}{32} = \frac{24}{32}$

Exemple III.5

1. $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
2. $A = \{PFP, PFF, FPF\}$ donc $P(A) = \frac{3}{8}$
3. $B = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ donc $P(A) = \frac{7}{8}$
4. $A \cap B = \{PFP, PFF, FPF\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Probabilités

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir ce qu'est une loi de probabilité.
- Savoir construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Connaître le vocabulaire des probabilités (univers, événement, réunion, intersection,...).
- Connaître et savoir utiliser les formules $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Savoir calculer une probabilité à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.

Probabilités

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir ce qu'est une loi de probabilité.
- Savoir construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Connaître le vocabulaire des probabilités (univers, événement, réunion, intersection,...).
- Connaître et savoir utiliser les formules $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Savoir calculer une probabilité à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.

Probabilités

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir ce qu'est une loi de probabilité.
- Savoir construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
- Connaître le vocabulaire des probabilités (univers, événement, réunion, intersection,...).
- Connaître et savoir utiliser les formules $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Savoir calculer une probabilité à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.