CHAPITRE 15

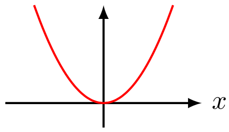
Fonctions de référence

I Fonctions carré et cube

1. Fonction carré

Définition I.1

La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Sa courbe représentative s'appelle une **parabole**.



Proposition I.2

- La fonction carré est une fonction paire.
- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration. → À rédiger

Proposition I.3

Soit a un nombre réel.

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ possède un seule solution : 0.
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

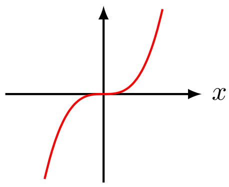
Exemple I.1 — Déterminer les antécédents de 4 et de -8 par la fonction carré. → À rédiger

Exemple I.2 — Résoudre les inéquations suivantes :
1. $x^2 \leqslant 5$ 2. $x^2 > 10$ 3. $x^2 < -3$. → À rédiger

2. Fonction cube

Définition I.4

La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



Proposition I.5

- La fonction cube est une fonction impaire.
- La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition I.6

Pour tout nombre réel a, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution qu'on appelle **racine cubique** de a.

Exemple I.3 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $x^3 = 8$ 2. $x^3 = -27$ 3. $x^3 = \frac{8}{27}$ → À rédiger

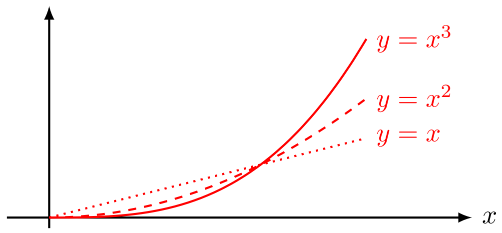
Exemple I.4 — À l'aide de la représentation graphique de la fonction cube, résoudre l'inéquation $x^3 \leqslant 64$. → À rédiger

3. Position relative

Théorème I.7

Soit x un réel positif.

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
- Si $1 \leqslant x$ alors $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.



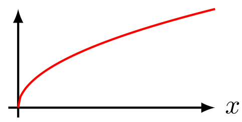
Démonstration. → À rédiger

II Fonctions racine carrée et inverse

1. Fonction racine carrée

Définition II.1

La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Exemple II.1 — Résoudre les équations suivantes :
1. $\sqrt{x} = 3$ 2. $\sqrt{x} - 10 = 0$ 3. $\sqrt{x} = -2$ → À rédiger

Proposition II.2

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple II.2 — À l'aide de la représentation graphique de la fonction racine carrée, résoudre les inéquations suivantes :
1. $\sqrt{x} < 12$ 2. $\sqrt{x} \geqslant 20$ → À rédiger

Proposition II.3

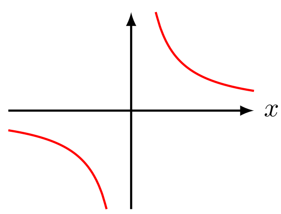
Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration. → À rédiger

2. Fonction inverse

Définition II.4

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Sa représentation graphique s'appelle une **hyperbole**.



Proposition II.5

- La fonction inverse est une fonction impaire.
- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration. → À rédiger

Exemple II.3 — Quels sont les antécédents de 4 par la fonction inverse ? → À rédiger

Solutions

Démonstration de la proposition I.2
On note f la fonction carré.

1. Pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = (-x) \times (-x) = x^2 = f(x)$ donc la fonction carré est paire.
2. Comme la fonction carré est paire, il suffit de montrer qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$ (par symétrie, elle sera décroissante sur $]-\infty; 0]$).
   Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors on va montrer que $f(a) \leqslant f(b)$ en étudiant le signe de leur différence. On a :
   $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$
   Or,
   - $b + a \geqslant 0$ car c'est une somme de deux nombres positifs ;
   - $b - a \geqslant 0$ car $b \geqslant a$

   Ainsi, $f(b) - f(a) \geqslant 0$ donc $f(a) \leqslant f(b)$.

Exemple I.1
Les antécédents de 4 sont -2 et 2.
Le nombre -8 n'a pas d'antécédent.

Exemple I.2

1. $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$
2. $S =]-\infty; -\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}; +\infty[$
3. $S = \emptyset$

Exemple I.3

1. $S = \{2\}$
2. $S = \{-3\}$
3. $S = \{\frac{2}{3}\}$

Exemple I.4
$S =]-\infty; 4]$

Démonstration du théorème I.7
Soit x un réel.

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $0 \times x \leqslant x \times x \leqslant 1 \times x$ c'est-à-dire $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.
  En multipliant de nouveau par x, on obtient $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$.
  On a donc bien $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.
- Si $1 \leqslant x$ alors $1 \times x \leqslant x \times x$ c'est-à-dire $x \leqslant x^2$.
  En multipliant de nouveau par x, on obtient $x^2 \leqslant x^3$. On a donc bien $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Exemple II.1

1. $S = \{9\}$
2. $S = \{100\}$
3. $S = \emptyset$

Démonstration de la proposition II.2
Pour tous nombres réels a et b positifs non nuls, on a $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. Pour le montrer, multiplier le quotient en haut et en bas par $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
Ainsi, si $a \leqslant b$ alors $b - a$ est postif. Comme $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ est aussi positif, on en déduit que $\sqrt{b} - \sqrt{a} \geqslant 0$ et donc la fonction racine carrée est croissante sur $]0; +\infty[$.

Exemple II.2

1. $S = [0; 144[$
2. $S = [400; +\infty[$

Démonstration de la proposition II.3
D'une part,
$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$
D'autre part,
$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
Comme $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$, on en déduit que $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, cela entraîne que $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

Démonstration de la proposition II.5
On note f la fonction inverse.

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ donc la fonction inverse est impaire.
2. Comme la fonction inverse est impaire, il suffit de montrer qu'elle est décroissante sur $]0; +\infty[$ (par symétrie, elle sera décroissante sur $]-\infty; 0[$).
   Si $0 < a \leqslant b$ alors on va montrer que $f(a) \geqslant f(b)$ en étudiant le signe de leur différence. On a :
   $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$
   Or,
   - $ab > 0$ car c'est le produit de deux nombres strictement positifs ;
   - $a - b \leqslant 0$ car $a \leqslant b$

   Ainsi, $f(b) - f(a) \leqslant 0$ donc $f(a) \geqslant f(b)$.

Exemple II.3
L'antécédent de 4 est $\frac{1}{4}$.

Fonctions de référence

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les propriétés de la fonction carré (fonction paire, sens de variation).
- Savoir résoudre une équation de la forme $x^2 = a$.
- Connaître les propriétés de la fonction cube (fonction impaire, sens de variation).
- Savoir résoudre une équation de la forme $x^3 = a$.
- Connaître la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.
- Connaître le sens de variation de la fonction racine carrée.
- Savoir que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$.
- Connaître les propriétés de la fonction inverse (fonction impaire, sens de variation).
- Pour les fonctions carré, inverse, racine carrée et cube, savoir résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ ou $f(x) < k$.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que la fonction carré est paire et croissante sur $[0; +\infty[$.
- Savoir montrer que $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$ si $1 \leqslant x$.
- Savoir montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$.
- Savoir montrer que la fonction inverse est paire et décroissante sur $]0; +\infty[$.

Fonctions de référence

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître les propriétés de la fonction carré (fonction paire, sens de variation).
- Savoir résoudre une équation de la forme $x^2 = a$.
- Connaître les propriétés de la fonction cube (fonction impaire, sens de variation).
- Savoir résoudre une équation de la forme $x^3 = a$.
- Connaître la position relative des courbes $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.
- Connaître le sens de variation de la fonction racine carrée.
- Savoir que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$.
- Connaître les propriétés de la fonction inverse (fonction impaire, sens de variation).
- Pour les fonctions carré, inverse, racine carrée et cube, savoir résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ ou $f(x) < k$.

Démonstrations à connaître.

- Savoir montrer que la fonction carré est paire et croissante sur $[0; +\infty[$.
- Savoir montrer que $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et que $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$ si $1 \leqslant x$.
- Savoir montrer que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lorsque $a > 0$ et $b > 0$.
- Savoir montrer que la fonction inverse est paire et décroissante sur $]0; +\infty[$.