CHAPITRE 12

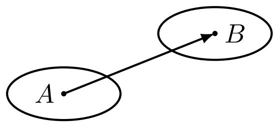
Vecteurs (1ère partie)

I Translations et vecteurs

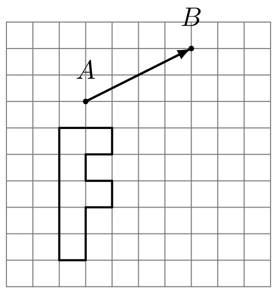
1. Notion de vecteur

Définition I.1

Une translation peut être est représentée à l'aide d'une flèche qu'on appelle **vecteur**.
Si une translation transforme un point A en un point B, on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemple I.1 — Construire l'image de la figure ci-dessous par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$:



$\rightarrow$ À rédiger

Définition I.2

Un vecteur $\vec{u}$ est défini à l'aide de trois caractéristiques :

- une **direction** (c'est-à-dire la droite qui « porte » $\vec{u}$)
- un **sens**
- une **norme** c'est-à-dire la longueur du vecteur(que l'on note $||\vec{u}||$).

Exemple I.2 — Si A et B sont deux points du plan, décrire les trois caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\rightarrow$ À rédiger

Exemple I.3 —

1. Tracer deux vecteurs qui ont la même direction, le même sens mais pas la même norme.
2. Tracer deux vecteurs qui ont la même direction, la même norme mais pas le même sens. $\rightarrow$ À rédiger

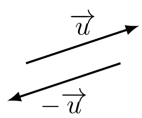
2. Vecteur nul et opposé d'un vecteur

Définition I.3

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point en lui-même s'appelle le **vecteur nul**.
On le note $\vec{0}$.

Définition I.4

L'**opposé** d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais qui a un sens opposé. On le note $-\vec{u}$.



Proposition I.5

Pour tous points A et B, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

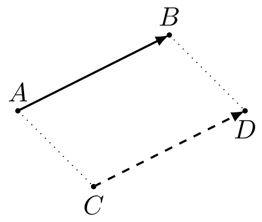
II Egalité de vecteurs

Définition II.1

Si la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D, on dira que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux et on notera $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Proposition II.2

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ces deux vecteurs ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple II.1 — Soit DEF un triangle et soit G et H les images respectives de D et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.

1. Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $EHGD$?
3. Que peut-on dire du point E pour le segment $[FH]$?

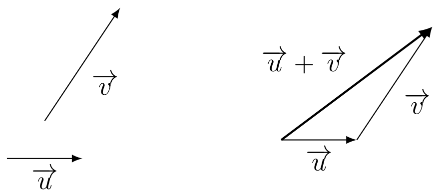
$\rightarrow$ À rédiger

III Somme de vecteurs

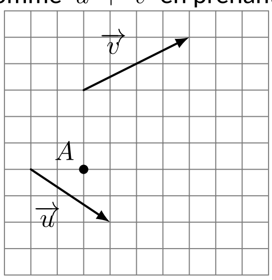
1. Définition de la somme de deux vecteurs

Définition III.1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur obtenu en appliquant successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Exemple III.1 — Tracer ci-dessous le vecteur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ en prenant le point A pour origine.



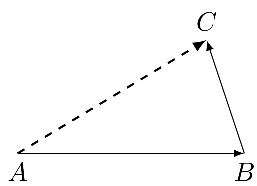
$\rightarrow$ À rédiger

2. Relation de Chasles

Théorème III.2

Pour tous points A, B et C du plan,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Exemple III.2 — Soit ABC un triangle.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. Constuire le point P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. À quel vecteur est égal le vecteur $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$?

$\rightarrow$ À rédiger

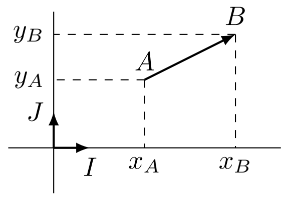
IV Vecteurs dans un repère

1. Coordonnées d'un vecteur

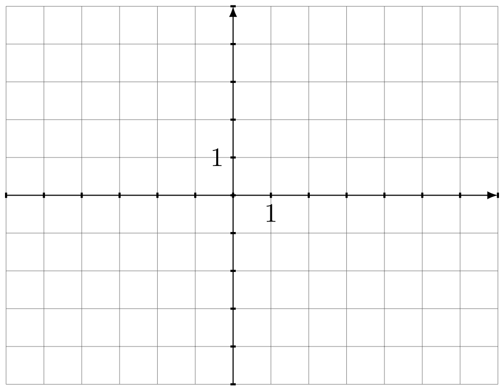
Définition IV.1

Soit $(O; I; J)$ un repère et A et B deux points du plan.

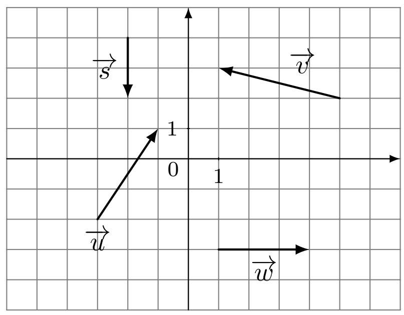
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Exemple IV.1 — Placer dans le repère ci-dessous les points $A(1; 2)$, $B(4; 3)$ et $C(-2; -2)$ puis calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. → À rédiger



Exemple IV.2 — Lire graphiquement les coordonnées de chacun des vecteurs présents ci-dessous : → À rédiger



Proposition IV.2

Dans un repère $(O; I; J)$, soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Les coordonnées de la somme de ces vecteurs est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

2. Norme d'un vecteur

Proposition IV.3

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

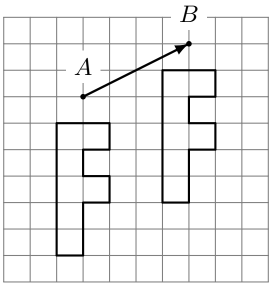
Remarque — En particulier, si A et B sont deux points du plan, on peut calculer la distance AB de la façon suivante : $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple IV.3 — Dans un repère orthonormé, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $||\overrightarrow{u + v}||$. A-t-on $||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u + v}||$? Pouvait-on s'y attendre ? → À rédiger

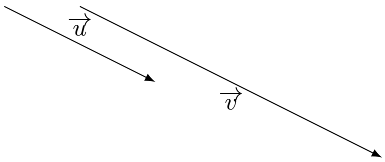
Solutions

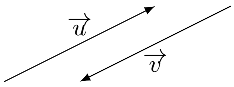
Exemple I.1
L'image obtenue est la suivante :



Exemple I.2
1. La direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB).
2. Le sens de $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B.
3. La norme de $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB.

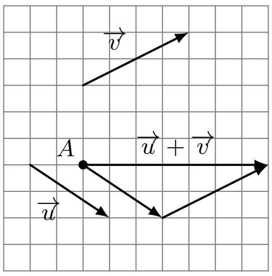
Exemple I.3
Voici les tracés demandés :

1. 

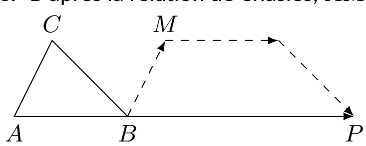
2. 

Exemple II.1
1. $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{DG}$
2. On en déduit que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DG}$ donc $EHGD$ est un parallélogramme.
3. E est le milieu de $[FH]$.

Exemple III.1
On a la figure suivante :



Exemple III.2
1. Voir figure.
2. Voir figure.
3. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP}$.



Exemple IV.1
On a :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+(-3)\\1+(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

Exemple IV.2
On a :
$\overrightarrow{s}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{s}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

Exemple IV.3
$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$
$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$
On a $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = \sqrt{9}$
On a donc $||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}|| \neq ||\overrightarrow{u+v}||$. On pouvait s'y attendre d'après l'inégalité triangulaire.

Vecteurs (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître déterminer les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens, norme).
- Savoir représenter géométriquement un vecteur.
- Savoir montrer que deux vecteurs sont égaux.
- Savoir construire la somme de deux vecteurs.
- Connaître et savoir appliquer la relation de Chasles.
- Savoir lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs.
- Savoir calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

Vecteurs (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître déterminer les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens, norme).
- Savoir représenter géométriquement un vecteur.
- Savoir montrer que deux vecteurs sont égaux.
- Savoir construire la somme de deux vecteurs.
- Connaître et savoir appliquer la relation de Chasles.
- Savoir lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs.
- Savoir calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.

Vecteurs (1ère partie)

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître déterminer les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens, norme).
- Savoir représenter géométriquement un vecteur.
- Savoir montrer que deux vecteurs sont égaux.
- Savoir construire la somme de deux vecteurs.
- Connaître et savoir appliquer la relation de Chasles.
- Savoir lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère.
- Savoir calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs.
- Savoir calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé.