

Variations de fonctions

I

Sens de variations d'une fonction

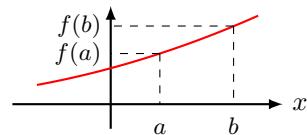
1. Fonction croissante

Une fonction qui ne cesse d'augmenter sur un intervalle sera dite croissante.

Définition I.1

On dit qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsque :

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$



Remarque — Autrement dit, si une fonction est croissante alors, lorsque deux antécédents sont dans un certain ordre, leurs images sont dans le même ordre.

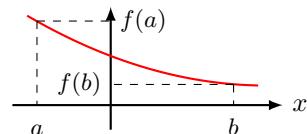
2. Fonction décroissante

Une fonction qui ne cesse de diminuer sur un intervalle sera dite décroissante.

Définition I.2

On dit qu'une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque :

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$



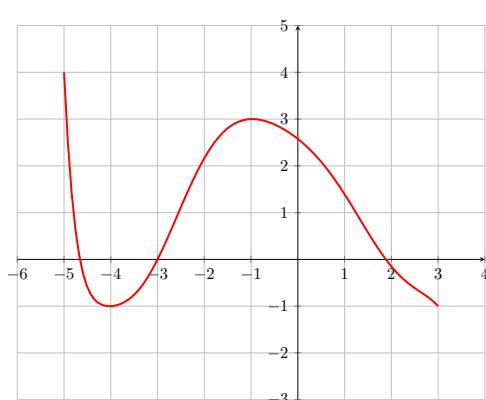
Remarque — Autrement dit, si une fonction est décroissante alors, lorsque deux antécédents sont dans un certain ordre, leurs images sont dans l'ordre inverse.

3. Tableau de variations

Pour résumer les variations d'une fonction, on les représente à l'aide d'un tableau de variations :

Exemple I.1 —

Fonction f définie sur $[-5; 3]$ par son graphe



Sens de variations de f

- La fonction f est :
- décroissante sur $[-5; -4]$
 - croissante sur $[-4; -1]$
 - décroissante sur $[-1; 3]$

Tableau de variations de f

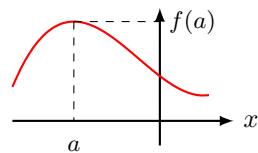
x	-5	-4	-1	3
f	4	-1	3	-1

II

Extrema d'une fonction

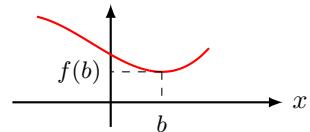
Définition II.1

On dit que $f(a)$ est le **maximum** de la fonction f sur un intervalle I si, pour tout x dans l'intervalle I , $f(x) \leq f(a)$.
On dit alors que le maximum est atteint en $x = a$.



Définition II.2

On dit que $f(b)$ est le **minimum** de la fonction f sur un intervalle I si, pour tout x dans l'intervalle I , $f(x) \geq f(b)$.
On dit alors que le minimum est atteint en $x = b$.



Exemple II.1 — On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-5; 7]$:

x	-5	-4	0	5	7
f	2	-3	4,5	-3	-1

- Comparer les nombres $f(1)$ et $f(2)$ en justifiant.
- Même question avec les nombres $f(-3)$ et $f(-2)$.
- Que peut-on dire des nombres $f(-1)$ et $f(6)$?
- Quel est le maximum de f sur I ? En quel(s) point(s) est-il atteint?
- Quel est le minimum de f sur I ? En quel(s) point(s) est-il atteint?
→ À rédiger

III

Variations des fonctions affines

1. Sens de variation d'une fonction affine

Proposition III.1

Une fonction affine $f(x) = ax + b$ est :

- croissante sur \mathbb{R} si $a > 0$
- décroissante sur \mathbb{R} si $a < 0$
- constante sur \mathbb{R} si $a = 0$

Exemple III.1 — Déterminer le sens de variations sur \mathbb{R} de chacune des fonctions affines suivantes :

$$1. f(x) = 2x - 5 \quad 2. g(x) = 4 - 3x \quad 3. h(x) = \frac{3x+5}{-4}$$

→ À rédiger

2. Déterminer le coefficient directeur d'une fonction affine

Proposition III.2

Soit f une fonction affine et soit A et B deux points situés sur la droite représentative de f . Le coefficient directeur de f est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

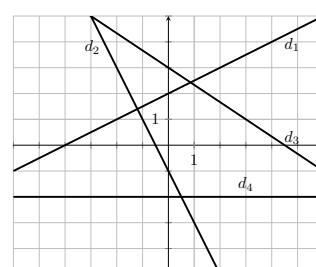
Exemple III.2 — Soit f une fonction affine tel que $f(0) = 2$ et $f(-3) = -5$.

1. Sans faire de calcul, la fonction f est-elle croissante ou décroissante sur \mathbb{R} ?

2. Déterminer le coefficient directeur de f puis retrouver le résultat de la question précédente.

→ À rédiger

Exemple III.3 — Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des fonctions affines représentées ci-dessous.
→ À rédiger



Solutions

Exemple II.1

1. $D_f = [-5; 7]$
2. $f(1) \geq f(2)$ car f est décroissante sur $[0; 5]$.
3. $f(-3) \leq f(-2)$ car f est croissante sur $[-4; 0]$.
4. On ne peut pas comparer les nombres $f(-1)$ et $f(6)$.
5. Le maximum est 4, 5. Il est atteint en $x = 0$.
6. Le minimum est -3. Il est atteint en $x = -4$ et en $x = 5$.

Exemple III.1

1. f est croissante sur \mathbb{R} car $a = 2 > 0$.
2. g est décroissante sur \mathbb{R} car $a = -3 < 0$.
3. h est décroissante sur \mathbb{R} car $h(x) = \frac{-3}{-4}x + \frac{5}{-4}$ et que $a = \frac{-3}{4} < 0$.

Exemple III.2

1. Comme f est une fonction affine et que $f(-3) < f(0)$, alors f ne peut pas être décroissante, ni constante sur \mathbb{R} . Elle est donc croissante sur \mathbb{R} .
2. $a = \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{2 - (-5)}{3} = \frac{7}{3} > 0$.
La fonction f est donc bien croissante sur \mathbb{R} .

Exemple III.3

On note f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions affines associées aux droites d_1, d_2, d_3 et d_4 .

$$f_1 : a = \frac{4 - 2}{4 - 0} = \frac{1}{2} \text{ et } b = 2$$

$$f_2 : a = \frac{3 - (-1)}{-2 - 0} = -2 \text{ et } b = -1$$

$$f_3 : a = \frac{1 - 3}{3 - 0} = \frac{-2}{3} \text{ et } b = 3$$

$$f_4 : a = \frac{-2 - (-2)}{1 - 0} = 0 \text{ et } b = -2$$

Variations de fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur un intervalle.
- Connaître la définition d'un maximum et d'un minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir déterminer graphiquement le extreumums d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir établir le tableau de variations d'une fonction définie par un graphique.
- Savoir calculer le coefficient directeur d'une fonction affine.
- Savoir déterminer le sens de variations d'une fonction affine.

Variations de fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur un intervalle.
- Connaître la définition d'un maximum et d'un minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir déterminer graphiquement le extreumums d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir établir le tableau de variations d'une fonction définie par un graphique.
- Savoir calculer le coefficient directeur d'une fonction affine.
- Savoir déterminer le sens de variations d'une fonction affine.

Variations de fonctions

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Connaître la définition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur un intervalle.
- Connaître la définition d'un maximum et d'un minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir déterminer graphiquement le extreumums d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir établir le tableau de variations d'une fonction définie par un graphique.
- Savoir calculer le coefficient directeur d'une fonction affine.
- Savoir déterminer le sens de variations d'une fonction affine.