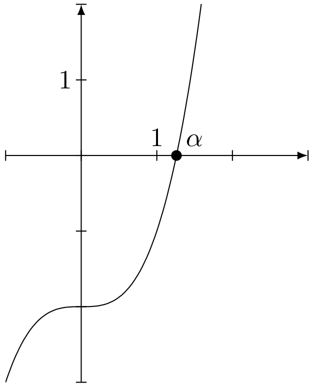
Variations de fonctions— TP

Algorithme de dichotomie

Le but de cette activité est de déterminer un encadrement de la racine cubique de 2 c'est-à-dire du nombre α tel que $\alpha^3 = 2$.
On a représenté ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2$. L'objectif est donc de déterminer sur l'intervalle $[0; 2]$ un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ avec une précision p choisie.



En effet, sur l'intervalle $[0, 2]$ la fonction f est strictement croissante et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
Pour trouver un encadrement de α, on utilise la méthode de **dichotomie** dont le principe est le suivant :

- On calcule l'image du centre de l'intervalle $[0, 2]$. Le centre de l'intervalle est 1 et, comme $f(1) < 0$ alors $\alpha > 1$.
- On poursuit alors la recherche de α sur l'intervalle $[1; 2]$.
- On calcule l'image du centre de l'intervalle $[1; 2]$. Le centre de l'intervalle est $1,5$ et $f(1,5) > 0$ donc $\alpha < 1,5$.
- On poursuit alors la recherche de α sur l'intervalle $[1; 1,5]$.
- Etc.
- On répète le processus tant que l'amplitude de l'intervalle est supérieure à la précision voulue.

1. Compléter le tableau suivant dans le but d'obtenir un encadrement d'amplitude $0,1$.
Toutes les lignes ne sont pas forcément à remplir.

a	b	Centre	Image du centre	Signe de l'image	Amplitude de l'intervalle
0	2	1	-1	$-$	2

La méthode par dichotomie peut être résumée par l'algorithme suivant :

```
P ← 0,001
T ← b - a
Tant que T > ......
    X ← (a+b)/2
    Y ← .....
    Si Y > 0 alors
        b ← X
    Sinon
        a ← X
    T ← b-a
Fin Tant que
Afficher a et b
```

3. Compléter l'algorithme pour qu'il permette d'afficher un encadrement de la solution α avec un précision de $0,001$.
4. Que représentent les variables X et T ?
5. Ecrire cet algorithme en Python et l'exécuter. En déduire un encadrement de la racine cubique de 2.
6. Sur le même principe, modifier le programme pour trouver un encadrement de la racine carrée de 2 à 10^{-5} près.