Statistiques

I Indicateurs de tendance centrale

1. Moyenne

Proposition I.1

La **moyenne pondérée** d'une série de valeurs x_i d'effectifs n_i et de fréquence f_i est :

$$\overline{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \cdots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \cdots + f_p \times x_p$$

Exemple I.1 — Calculer l'âge moyen d'un groupe d'élèves dont on a décrit ci-dessous la répartition statistique :

Âge (x_i)	11	13	15	17
Effectif (n_i)	3	2	5	4

$\longrightarrow$ À rédiger

Proposition I.2

- Si toutes les valeurs d'une série statistique sont multipliées par un nombre a alors la moyenne est elle aussi multipliée par a.
- Si on ajoute un nombre b à toutes les valeurs d'une série statistique alors la moyenne est elle aussi augmentée de b.

Exemple I.2 — Un professeur a noté un contrôle sur 20. Voici les notes obtenues à ce devoir : 8 - 7 - 8 - 4 - 13 - 13 - 13 - 10 - 4 - 17 - 18 - 4 - 13 - 11 - 9 - 15.

Note	4	7	8	9	10	11	13	15	17	18
Fréquence										

1. Recopier et compléter le tableau puis déterminer la moyenne de cette classe.
2. Trouvant les notes un peu élevées, le professeur décide de diminuer de 10% chacune des notes. Déterminer la nouvelle moyenne.
3. Après avoir diminué les notes de 10%, le professeur décide d'ajouter un demi-point à chaque élève malgré tout. Quelle est finalement la moyenne à ce devoir ?

$\longrightarrow$ À rédiger

2. Médiane

Définition I.3

La **médiane** M_e d'une série est un nombre qui partage cette série en deux séries de même effectif lorsque la série de départ est rangée dans l'ordre croissant.

Proposition I.4

Pour déterminer la médiane d'une série de N valeurs, on détermine le plus grand nombre entier n supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$.

- Si N est un nombre impair alors la médiane est la $n^{\text{ème}}$ valeur.
- Si N est un nombre pair alors la médiane est le milieu de la $n^{\text{ème}}$ et de la $(n+1)^{\text{ème}}$ valeur.

Exemple I.3 — On a relevé les âges des membres d'un club de Scouts :

$$10 - 7 - 17 - 14 - 9 - 8 - 9 - 13 - 10 - 12 - 11 - 15 - 14$$

Quelle est l'âge médian dans ce club ?

$\longrightarrow$ À rédiger

Exemple I.4 — Voici les résultats des élèves d'une classe à une évaluation notée sur 10 :

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	1	6	5	2	9	7	1	0	1
ECC										

Compléter la dernière ligne de ce tableau, puis déterminer la note médiane dans cette classe.

$\longrightarrow$ À rédiger

II Indicateurs de dispersion

1. L'étendue

Définition II.1

L'**étendue** d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la série.

2. L'écart interquartile

Définition II.2

- Le **premier quartile** $Q1$ d'une série est la plus petite valeur de la série telle qu'*au moins* 25% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q1$.
- Le **troisième quartile** $Q3$ d'une série est la plus petite valeur de la série telle qu'*au moins* 75% des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $Q3$.

Proposition II.3

Pour calculer le premier quartile d'une série contenant N valeurs, on calcule le plus grand entier n supérieur ou égal à $\dfrac{N}{4}$. Le premier quartile est alors la $n^{\text{ème}}$ valeur de la série.

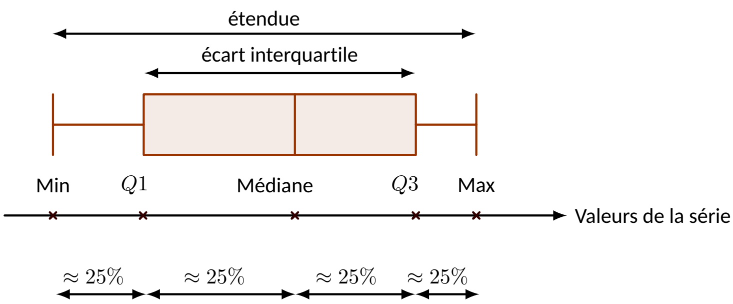
Pour calculer le troisième quartile, on fait de même avec $\dfrac{3N}{4}$.

Exemple II.1 — Lors d'un contrôle, on a relevé les différentes notes suivantes : 10 - 7 - 17 - 14 - 9 - 8 - 9 - 13 - 10 - 12 - 11 - 15 - 14. Déterminer les quartiles de cette série puis interpréter. $\longrightarrow$ À rédiger

Définition II.4

L'**écart interquartile** est la différence entre le 3ème quartile et le 1er quartile, c'est-à-dire $Q3 - Q1$.

Remarque — L'écart interquartile mesure la dispersion par rapport à la médiane. Plus l'écart interquartile est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la médiane.



3. L'écart-type

Proposition II.5

L'**écart-type** σ (« sigma ») d'une série de valeurs x_i d'effectifs n_i est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Autrement dit,

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \cdots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1+n_2+\cdots+n_p}}$$

Remarque — L'écart-type mesure la dispersion par rapport à la moyenne. Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

Exemple II.2 — On a relevé l'âge des participants à une compétition de judo :

Âge (x_i)	15	16	17	18
Effectif (n_i)	24	29	35	22

1. Déterminer l'écart-type de cette série à 0,01 près.
2. Retrouver ce résultat à l'aide de votre calculatrice. $\longrightarrow$ À rédiger

Solutions

Exemple I.1
Calcul de la moyenne :
$\overline{x} = \dfrac{3 \times 11 + 2 \times 13 + 5 \times 15 + 4 \times 17}{3+2+5+4} = \dfrac{202}{14} \simeq 14,4$
ans.

Exemple I.2
On a le tableau suivant :

Note	4	7	8	9	10	11	13	15	17	18
Fréquence	0,1875	0,0625	0,125	0,0625	0,0625	0,0625	0,25	0,0625	0,0625	0,0625

1. $\overline{x} = 0,1875 \times 4 + 0,0625 \times 7 + \cdots \simeq 10.4375$
2. Diminuer de 10% revient à multiplier par $0,9$. La nouvelle moyenne est $0,9 \times 10,4375 = 9,39375$.
3. La nouvelle moyenne est $9,39375 + 0,5 = 9,89375$.

Exemple I.3
On range la série dans l'ordre croissant :

$$7 - 8 - 9 - 9 - 10 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 14 - 15 - 17$$

L'effectif total est $N = 13$ et $N/2 = 6,7$. La médiane est la 7ème valeur donc $M_e = 11$.

Exemple I.4
On a le tableau suivant :

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	1	6	5	2	9	7	1	0	1
ECC	2	3	9	14	16	25	32	33	33	34

L'effectif total est $N = 34$. Comme $N/2 = 17$ et que l'effectif est pair, la médiane est le milieu de la 17ème et de la 18ème valeur.
La 17ème valeur est 6. La 18ème valeur est 6. La médiane est $M_e = \dfrac{6+6}{2} = 6$.

Exemple II.1
On range la série dans l'ordre croissant :

$$7 - 8 - 9 - 9 - 10 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 14 - 15 - 17$$

Effectif total : $N = 13$
$\dfrac{N}{4} = \dfrac{13}{4} = 3,25$ donc le 1er quartile est la 4ème valeur.
Ainsi, $Q1 = 9$.
Interprétation : il y a au moins 25% des valeurs des notes qui sont inférieures ou égales à 9.
$\dfrac{3*N}{4} = \dfrac{13}{4} = 9,75$ donc le 1er quartile est la 10ème valeur.
Ainsi, $Q1 = 14$.
Interprétation : il y a au moins 75% des valeurs des notes qui sont inférieures ou égales à 14.

Exemple II.2
La moyenne est $\overline{x} = 16,5$. Pour trouver l'écart-type, on utilise le tableau suivant :

Âge (x_i)	15	16	17	18
Effectif (n_i)	24	29	35	22
$n_i \times (x_i - \overline{x})^2$	54	7,25	8,75	49,5

L'écart-type est :

$$\sigma = \frac{54 + 7,25 + 8,75 + 49,5}{24 + 29 + 35 + 22} \simeq 1,086$$

Statistiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer une moyenne pondérée.
- Savoir calculer une moyenne lorsque toutes les valeurs augmentent d'un même nombre ou sont multipliées par un même nombre.
- Savoir calculer la médiane et les quartiles d'une série.
- Savoir déterminer l'étendue et l'écart interquartile d'une série.
- Savoir déterminer l'écart-type d'une série.
- Savoir décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.

Statistiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer une moyenne pondérée.
- Savoir calculer une moyenne lorsque toutes les valeurs augmentent d'un même nombre ou sont multipliées par un même nombre.
- Savoir calculer la médiane et les quartiles d'une série.
- Savoir déterminer l'étendue et l'écart interquartile d'une série.
- Savoir déterminer l'écart-type d'une série.
- Savoir décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.

Statistiques

A savoir faire à la fin du chapitre.

- Savoir calculer une moyenne pondérée.
- Savoir calculer une moyenne lorsque toutes les valeurs augmentent d'un même nombre ou sont multipliées par un même nombre.
- Savoir calculer la médiane et les quartiles d'une série.
- Savoir déterminer l'étendue et l'écart interquartile d'une série.
- Savoir déterminer l'écart-type d'une série.
- Savoir décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.